A.I. MARKUSHEVICH

INITIATION AUX MATHÉMATIQUES

1

ALEKSEI IVANOVICH MARKUSHEVICH

QUATRE COURS DE MATHÉMATIQUES

COURBES REMARQUABLES

AIRES ET LOGARITHMES

SUITES RÉCURRENTES

NOMBRES COMPLEXES ET REPRÉSENTATIONS CONFORMES

AVANT-PROPOS

Ce petit livre s'adresse principalement aux écoliers ainsi qu'aux adultes, désireux de continuer à s'instruire, dont les connaissances en mathématiques se bornent aux programmes de l'école secondaire. Le livre est constitué par des leçons faites aux écoliers des classes terminales de Moscou.

En préparant la leçon sur les « Courbes remarquables » pour la publication, l'auteur l'a toutefois un peu élargie, s'efforçant cependant de la laisser accessible. La principale addition a été celle du § 13 sur l'ellipse, l'hyperbole, la parabole, en tant que sections de surfaces coniques.

Afin de ne pas augmenter le volume du livre, la plupart des données relatives aux courbes sont exposées sans démonstration, bien que souvent on aurait pu les démontrer sous une forme accessible au lecteur.

La leçon « Aires et logarithmes » a été faite à l'Université de Moscou à un large auditoire d'écoliers, futurs participants aux olympiades mathématiques. Son but est d'exposer la théorie géométrique des logarithmes, dans laquelle les logarithmes apparaissent comme certaines aires et où toutes leurs propriétés sont tirées des propriétés de ces aires. Chemin faisant, la leçon fait connaître les notions et faits élémentaires du calcul intégral. Dans ce volume elle est donnée avec quelques suppléments. En en commençant la lecture, on peut ne pas savoir ce que c'est qu'un logarithme. Seule est nécessaire la connaissance des fonctions les plus élémentaires et leur représentation graphique, celle de la progression géométrique et de la notion de limite.

La leçon « Suites récurrentes » a été exposée par l'auteur aux écoliers participant à l'olympiade mathématique de Moscou et, sous un aspect un peu modifié, à l'Institut de Moscou pour le perfectionnement des instituteurs. Dans le présent volume, elle est quelque peu élargie.

Son thème se rapproche du cours scolaire (progressions arithmétiques et géométriques, suite des carrés des nombres

naturels, suites des coefficients du quotient de polynômes disposés par degrés croissants, etc.). C'est en même temps une véritable petite théorie mathématique [1]), achevée, simple et claire, comme tout ce qui est sorti des mains des grands maîtres de l'analyse mathématique qui l'ont créée.

Les principes de la théorie des suites récurrentes ont été élaborés et publiés dans les années vingt du XVIIIe par le mathématicien français Moivre [dont le nom a été donné à la formule: $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$] et par un des premiers membres, chronologiquement, de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg, le mathématicien suisse Daniel Bernoulli. La théorie développée en a été donnée par un des plus éminents mathématiciens du XVIIIe siècle, Leonhard Euler, membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg, qui a consacré aux suites (séries) récurrentes le Chapitre treize de son « Introduction à l'analyse des infiniment petits » (1748). Parmi des travaux plus récents, il convient de signaler l'exposé de la théorie des suites récurrentes dans le cours du calcul des différences finies par les célèbres mathématiciens russes, membres de l'Académie, P. Tchébychev et A. Markov.

La dernière leçon fait connaître au lecteur les nombres complexes et les fonctions élémentaires qui s'y rapportent (y compris la fonction de Joukovski et son application à la construction du profil d'aile d'avion). La forme géométrique a été donnée à l'exposé. Les nombres complexes sont considérés comme des secteurs orientés; les fonctions, comme des représentations. Pour rendre accessible au lecteur cette façon de comprendre les nombres complexes, nous commençons par l'interprétation géométrique des nombres réels et des opérations effectuées sur eux. Une connaissance préalable des nombres complexes n'est pas exigée du lecteur.

L'AUTEUR

---

[1]) Pour le lecteur accoutumé à l'analyse mathématique, indiquons que c'est l'analogue exact de la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

Courbes remarquables

1 Dans le langage courant, le mot « courbe » est souvent employé comme adjectif signifiant: qui s'écarte de la droite. Pour les mathématiciens, c'est un substantif qui désigne une ligne courbe. Qu'est-ce qu'une ligne courbe? Comment embrasser dans la même définition toutes les courbes qu'on trace au crayon ou à la plume sur le papier, à la craie sur le tableau noir et que les étoiles filantes ou une fusée dessinent la nuit dans le ciel ?

Voici la définition que nous adopterons: *une courbe* (sous-entendu une ligne courbe) *est la trace laissée par un point qui se meut.* Dans nos exemples, ce sera la pointe bien taillée d'un crayon, le bord aigu d'un bout de craie, un météore en ignition pénétrant dans les couches supérieures de l'atmosphère, une fusée. En partant de cette définition, la ligne droite est un cas particulier de courbe. En effet, pourquoi un point en mouvement ne pourrait-il laisser une trace rectiligne ?

2 Un point qui se meut décrit effectivement une droite quand il passe de sa position à toute autre suivant le plus court chemin. Pour tracer une droite, on se sert d'une règle; quand le crayon glisse le long du bord de la règle, sa pointe laisse sur le papier une trace rectiligne.

Si le point se meut sur un plan en restant toujours à la même distance d'un certain point immobile de ce plan, il décrit un cercle; c'est sur cette propriété du cercle qu'on s'appuie quand on le trace au moyen d'un compas.

La droite et le cercle sont les courbes les plus simples et, en même temps, celles dont les propriétés sont les plus remarquables. Le lecteur est mieux renseigné sur ces courbes. Mais il ne connaît pas souvent à fond toutes les propriétés principales des droites et des cercles. Sait-il, par exemple, que si les sommets de deux triangles ABC et $A'B'C'$ se trouvent sur trois droites se coupant au même point S (fig. 1), les trois points M, K, L d'intersection des côtés

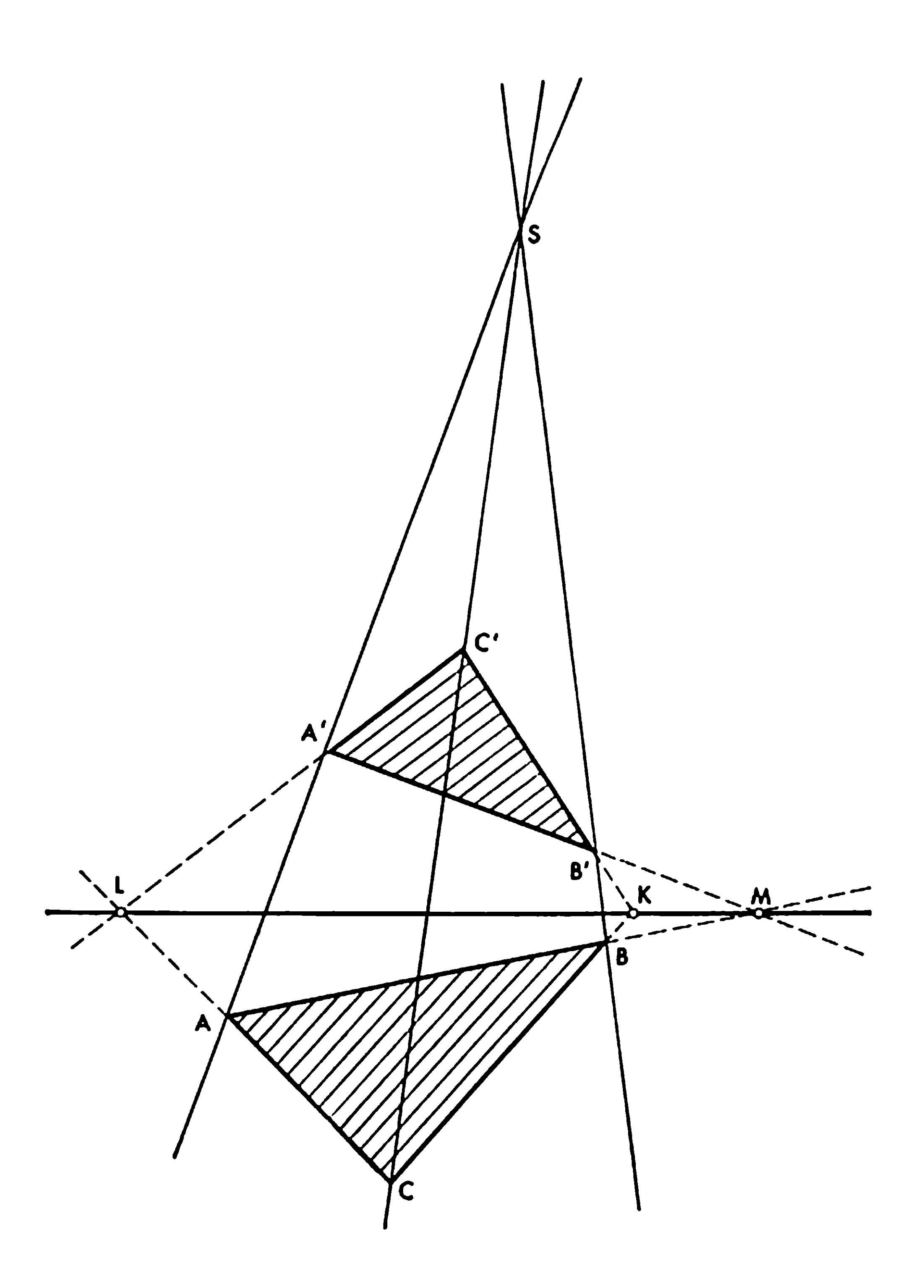


Fig. 1

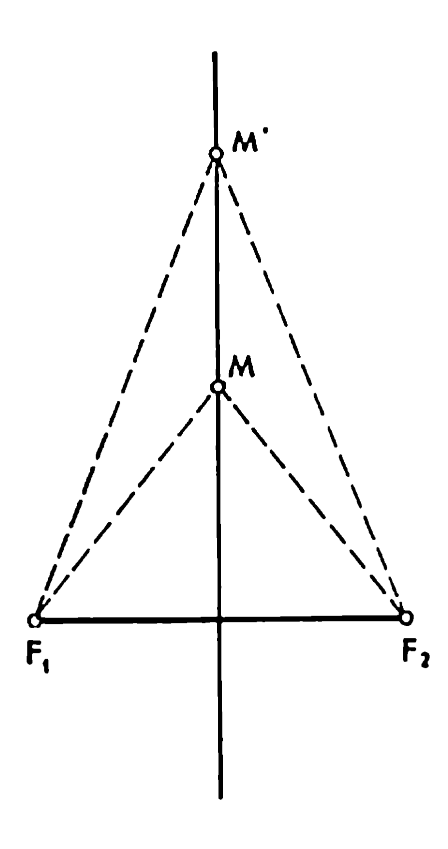


Fig. 2

correspondants des triangles AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AC et $A'C'$ doivent se trouver sur une même droite ?

Le lecteur sait certainement que le point M qui se déplace sur un plan en restant à des distances égales de deux points immobiles F_1 et F_2 du même plan, c'est-à-dire de façon que $MF_1 = MF_2$, décrit une droite (fig. 2). Mais il aura probablement du mal à dire quelle courbe dessine le point M si sa distance du point F_1 est un multiple de sa distance au point F_2 (le double, par exemple, comme sur la fig. 3). Il s'avère qu'une telle courbe est un cercle. Par conséquent, si le point M se meut sur le plan de façon que sa distance de l'un de deux points immobiles de ce plan F_1 et F_2 change proportionnellement à la distance de l'autre point :

$$MF_1 = k \cdot MF_2,$$

le point M décrit soit une droite (si le coefficient de pro-

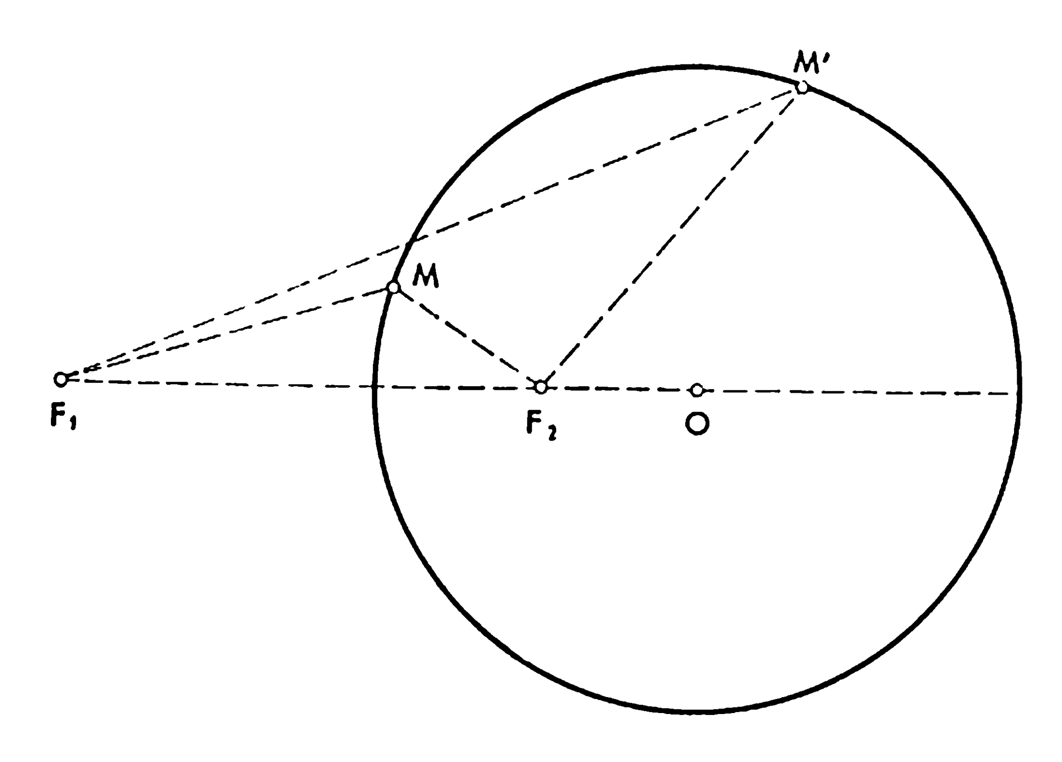


Fig. 3

portionnalité k est égal à l'unité), soit un cercle (si le coefficient de proportionnalité est différent de l'unité).

3 Examinons la courbe tracée par le point M de façon que la somme des distances de ce point à deux points fixes F_1 et F_2 reste la même. Prenons un fil, attachons ses extrémités à deux épingles et plantons ces épingles dans une feuille de papier en laissant d'abord le fil lâche. Si maintenant nous tendons le fil au moyen d'un crayon placé verticalement en l'appuyant légèrement sur le papier et en faisant attention à ce que le fil reste tendu (fig. 4), la pointe du crayon décrit une courbe de forme ovale (ressemblant à un cercle aplati) ; cette courbe s'appelle une *ellipse*.

Pour obtenir une ellipse entière, il faut faire passer le fil de l'autre côté des épingles après avoir dessiné une moitié d'ellipse. Il est évident que la somme des distances de la pointe M du crayon aux perforations d'épingle F_1

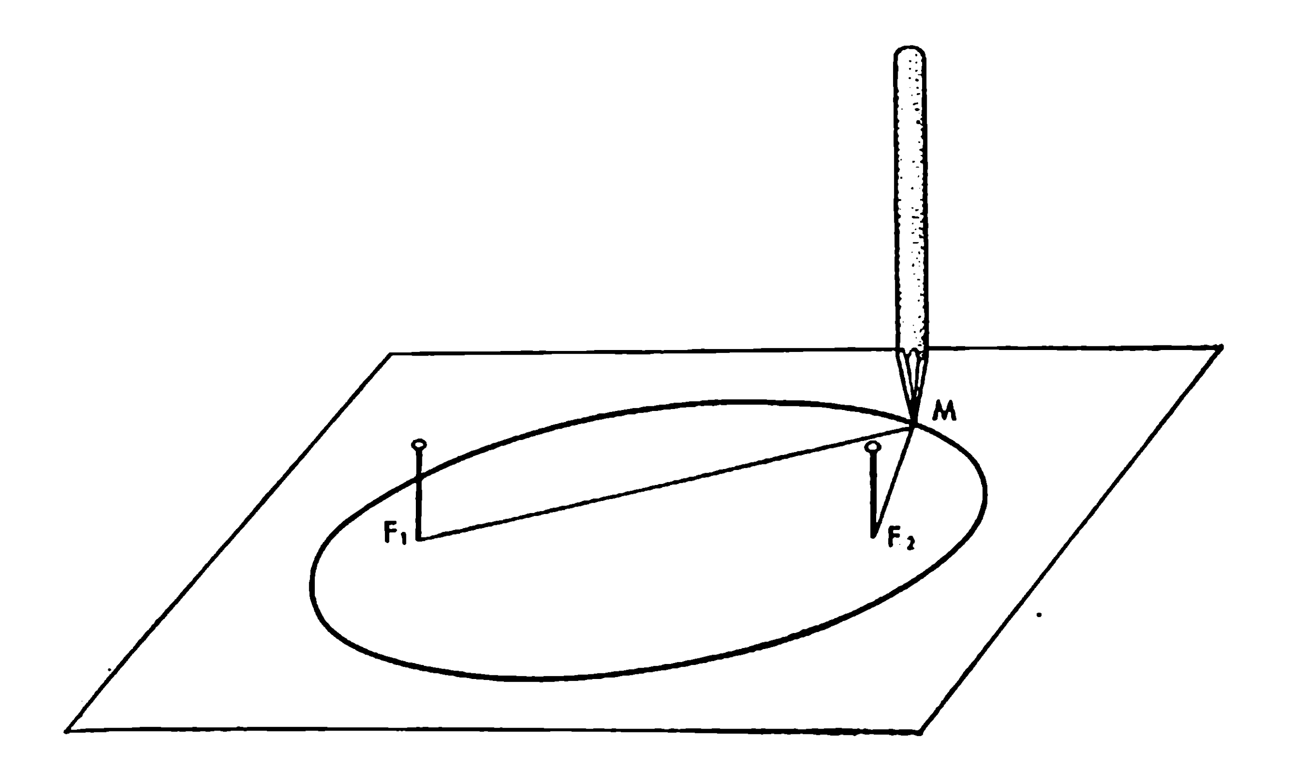


Fig. 4

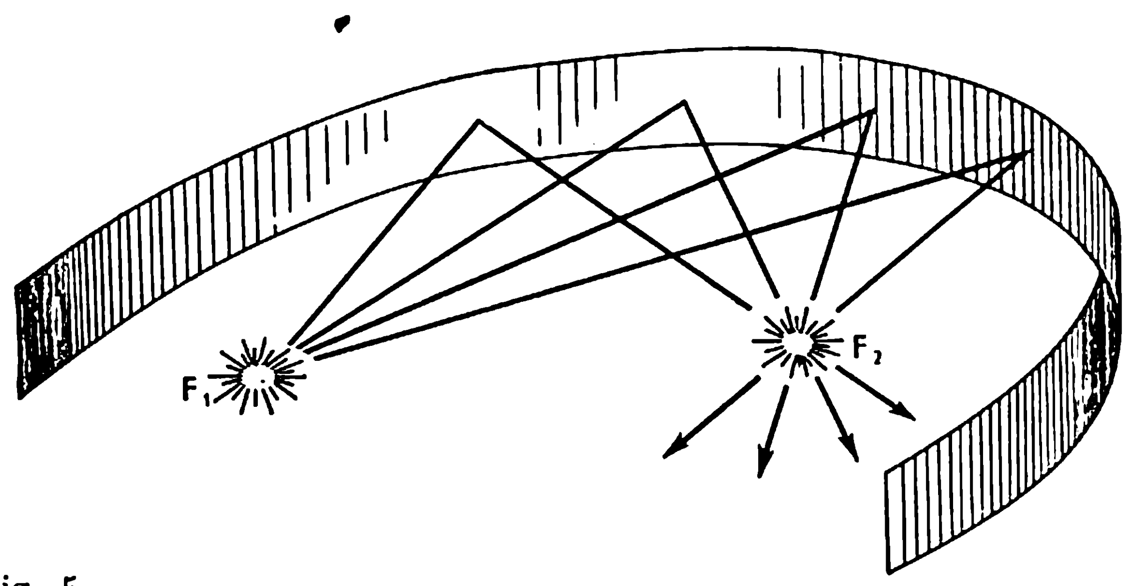


Fig. 5

et F_2 reste constante pendant toute la durée du mouvement; cette somme est égale à la longueur du fil.

Les perforations d'épingle marquent sur le papier deux points appelés *foyers* de l'ellipse. Le mot foyer qui désigne le lieu où l'on fait du feu est justifié par une propriété remarquable de l'ellipse. Si l'on courbe en arc d'ellipse une mince bande de métal parfaitement poli et si l'on place à l'un des foyers une source de lumière ponctuelle (un « feu »), les rayons de lumière réfléchis par la bande de métal se rassembleront à l'autre foyer: c'est pourquoi un « feu », l'image du premier, sera également visible à l'autre foyer (fig. 5).

4 Si l'on réunit les foyers de l'ellipse par un segment de droite et qu'on prolonge ce segment jusqu'à sa rencontre avec l'ellipse, on obtient le grand axe de l'ellipse: A_1A_2 (fig. 6). L'ellipse est symétrique par rapport à son grand axe. Si l'on divise en deux le segment F_1F_2 et qu'on mène la perpendiculaire en son milieu, en prolongeant cette perpendiculaire jusqu'à sa rencontre avec l ellipse, on obtient le petit axe de l'ellipse: B_1B_2. C'est aussi un axe de symétrie pour l'ellipse. Les extrémités des axes: A_1A_2, B_1B_2 sont appelées *sommets* de l'ellipse.

La somme des distances du point A_1 aux foyers F_1 et F_2 doit être la longueur du fil:

$$A_1F_1 + A_1F_2 = l.$$

Mais

$$A_1F_1 = A_2F_2$$

en raison de la symétrie de l'ellipse; c'est pourquoi on peut remplacer A_1F_1 par A_2F_2 et obtenir:

$$A_2F_2 + A_1F_2 = l.$$

Il est évident que le premier membre de cette égalité est la longueur du grand axe de l ellipse. Donc, la longueur du grand axe est égale à celle du fil; autrement dit, la somme

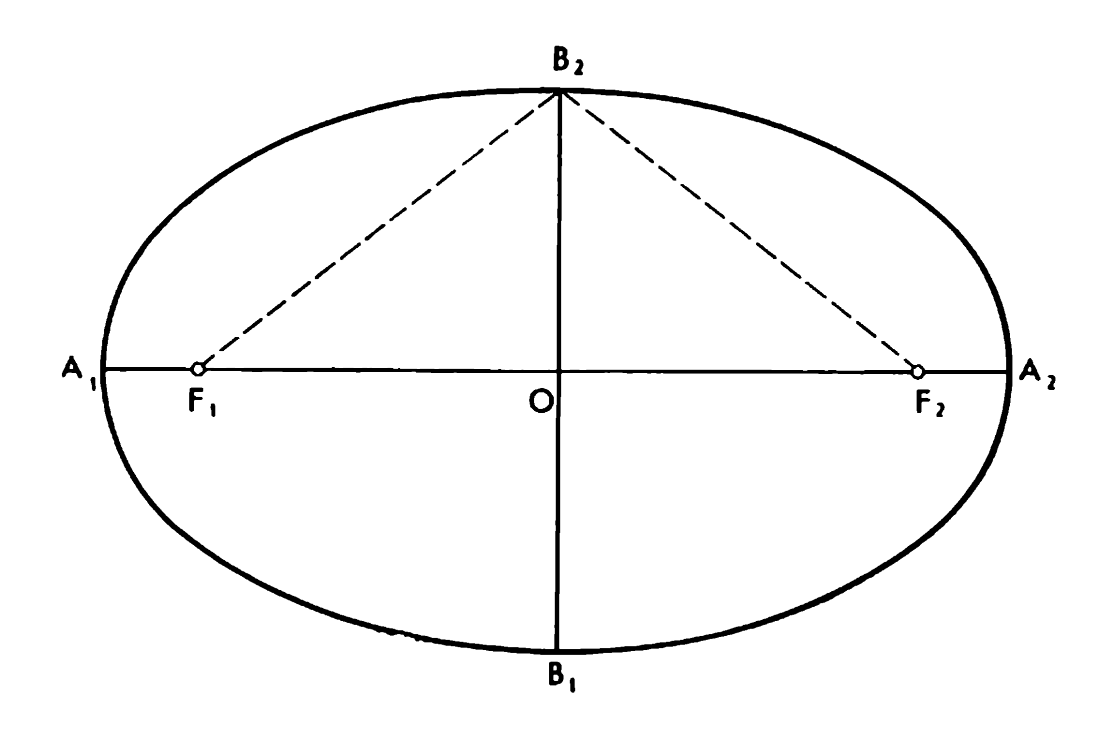


Fig. 6

des distances de tout point de l'ellipse aux foyers est égale au grand axe de cette ellipse. Il en découle, en raison de la symétrie de l'ellipse, que la distance du sommet B_2 (ou B_1) à chacun des foyers est égale à la moitié de la longueur du grand axe. C'est pourquoi, connaissant les sommets de l'ellipse, il est aisé de construire ses foyers : il faut trouver les intersecteurs du grand axe avec l'arc de cercle ayant pour centre le point B_2 et pour rayon, la moitié de A_1A_2.

5 Sur un grand axe de l'ellipse pris comme diamètre, construisons une circonférence (fig. 7). A partir d'un point quelconque N de la circonférence abaissons sur le grand axe la perpendiculaire NP qui coupe l'ellipse au point M. Il est évident que NP est de plusieurs fois supérieur à MP. Or, si l'on prend un autre point N' quelconque de la circonférence et qu'on fasse la même construction, $N'P'$ sera supérieur au segment respectif $M'P'$ du même

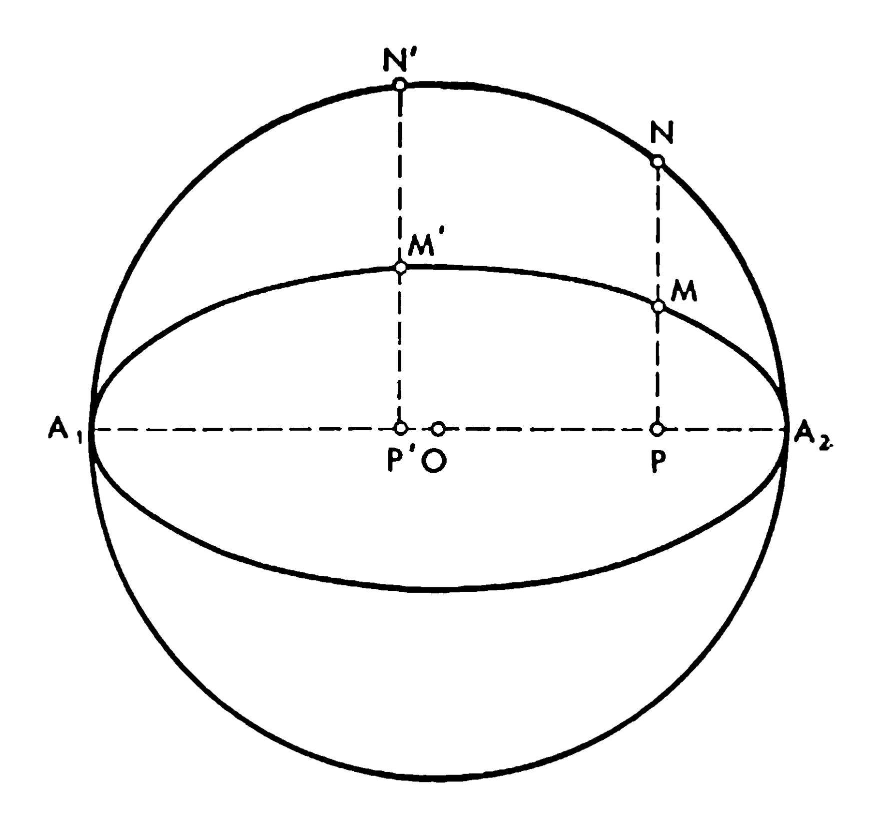


Fig. 7

nombre de fois:

$$\frac{NP}{MP} = \frac{N'P'}{M'P'}.$$

En d'autres termes, on peut obtenir une ellipse à partir de la circonférence circonscrite en rapprochant tous les points de la circonférence du grand axe de l'ellipse par réduction d'un même nombre de fois des distances de ces points au grand axe. C'est sur cette propriété que repose un procédé simple de construction de l'ellipse point par point. Traçons une circonférence, menons-en un diamètre quelconque, puis remplaçons les points de la circonférence par d'autres situés sur les perpendiculaires au diamètre à des distances un certain nombre de fois ($1\,{}^1/_2$, 2, 3 fois, etc.) plus rapprochées de lui. Nous obtenons les points d'une ellipse dont le grand axe coïncide avec le diamètre de la circonférence et dont le petit axe est un certain nombre de fois ($1\,{}^1/_2$, 2, 3 fois, etc.) plus petit que le diamètre.

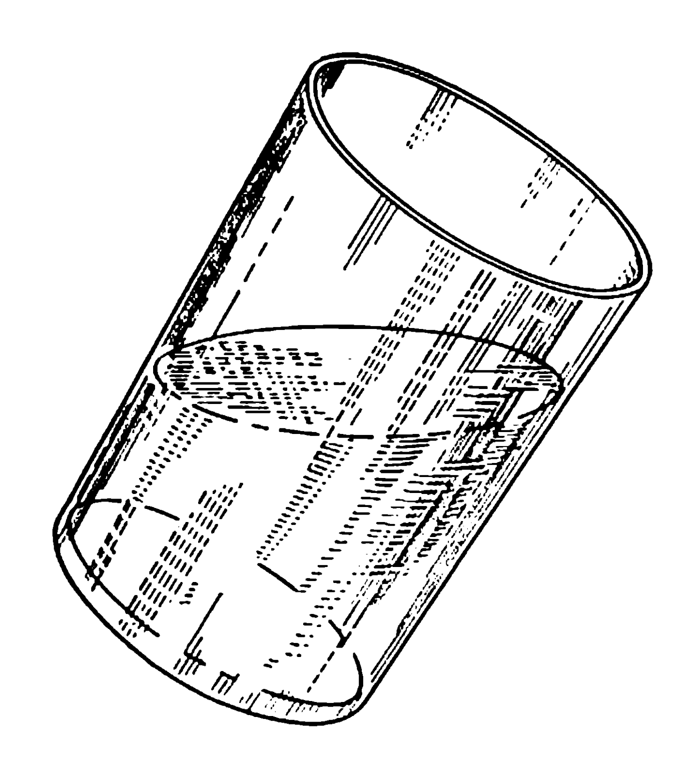


Fig. 8

6 Dans la vie courante, nous observons souvent des ellipses. Par exemple, si l'on incline un verre rempli d'eau, la courbe circonscrivant la surface supérieure de l'eau est une ellipse (fig. 8) ; il en est de même quand on coupe des tranches d'un morceau de saucisson cylindrique en tenant le couteau obliquement, ces tranches ont aussi la forme d'une ellipse (fig. 9). D'une façon générale, si un cylindre droit (ou un cône) est coupé obliquement (de façon à ne pas empiéter sur la base), la coupe obtenue est une ellipse (fig. 10).

Képler (1571-1630), déjà, avait découvert que les planètes tournent autour du Soleil non pas suivant des cercles, comme on le croyait avant lui, mais suivant des ellipses, de façon que le Soleil se trouve au foyer de chaque ellipse (fig. 11). Au cours de sa révolution, la planète se trouve une fois au sommet de l'ellipse A_1 le plus rapproché du Soleil, c'est le *périhélie*, et une fois au sommet A_2 le plus éloigné du Soleil, c'est l'*aphélie*. Par exemple, la Terre est au périhé-

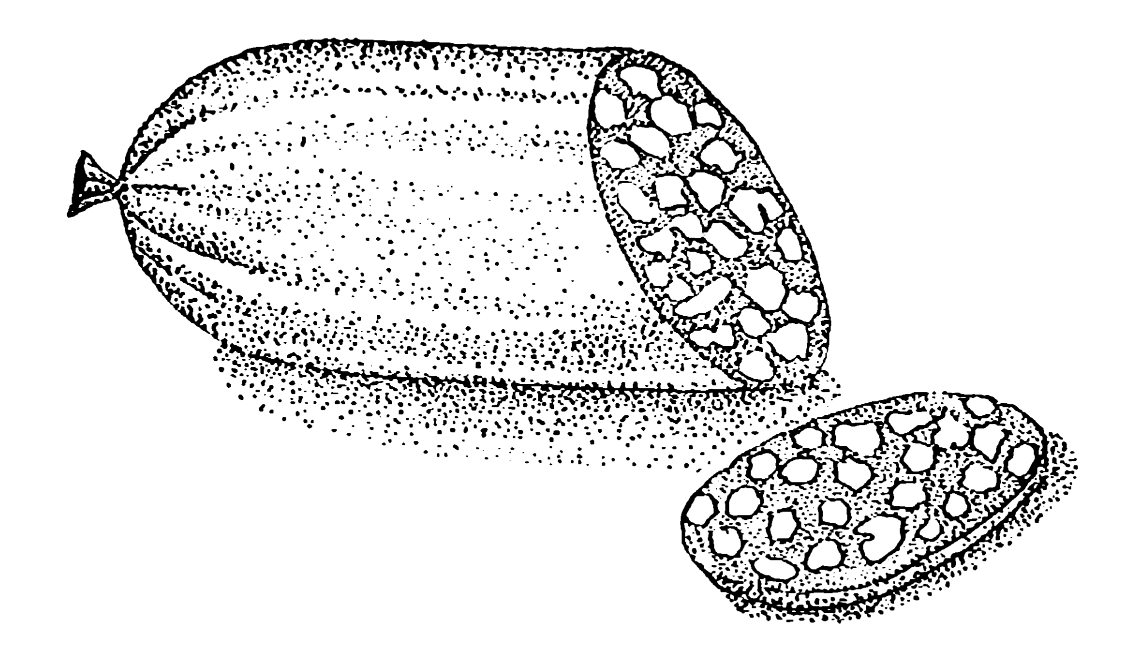


Fig. 9

lie quand c'est l'hiver sur notre hémisphère et à l'aphélie quand c'est l'été. L'ellipse suivant laquelle gravite la Terre est peu aplatie; elle ressemble à un cercle.

7 Traçons, sur une feuille de papier, une droite D_1D_2 quelconque, prenons un point F en dehors de cette droite et déplaçons la pointe M d'un crayon de façon que sa distance de la droite soit à tout moment égale à sa distance du point F (fig. 12). Pour cela, il suffit de fixer au moyen d'une punaise au sommet S d'une équerre un fil d'une longueur égale au côté SN et d'attacher l'extrémité du fil à une épingle enfoncée au point F. Si, maintenant, l'autre côté de l'équerre glisse le long d'une règle appuyée sur D_1D_2, la pointe M du crayon, tendant le fil et l'appuyant contre le côté libre de l équerre, se trouvera à des distances égales de la règle et de l'épingle:

$$NM = MF.$$

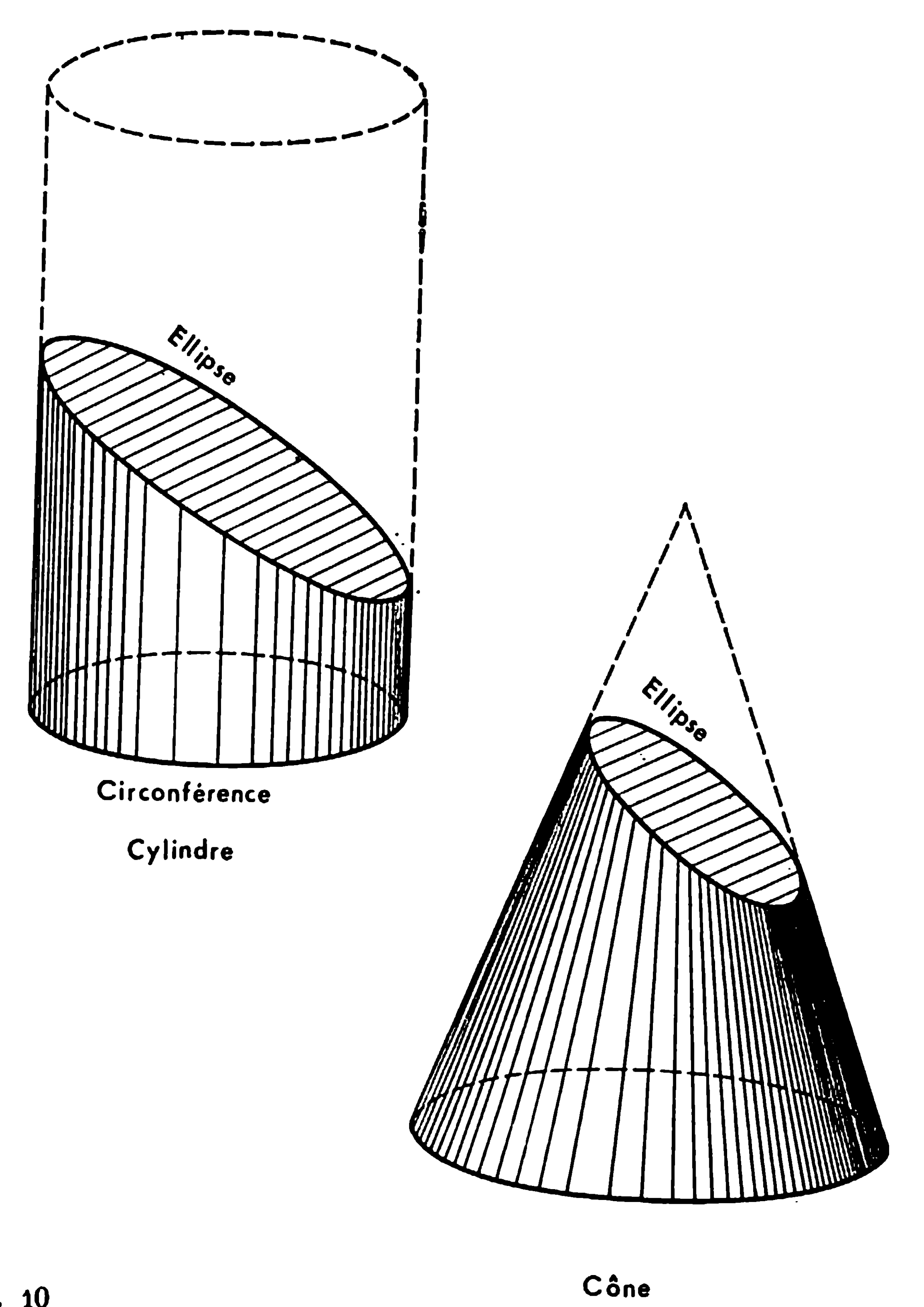


Fig. 10

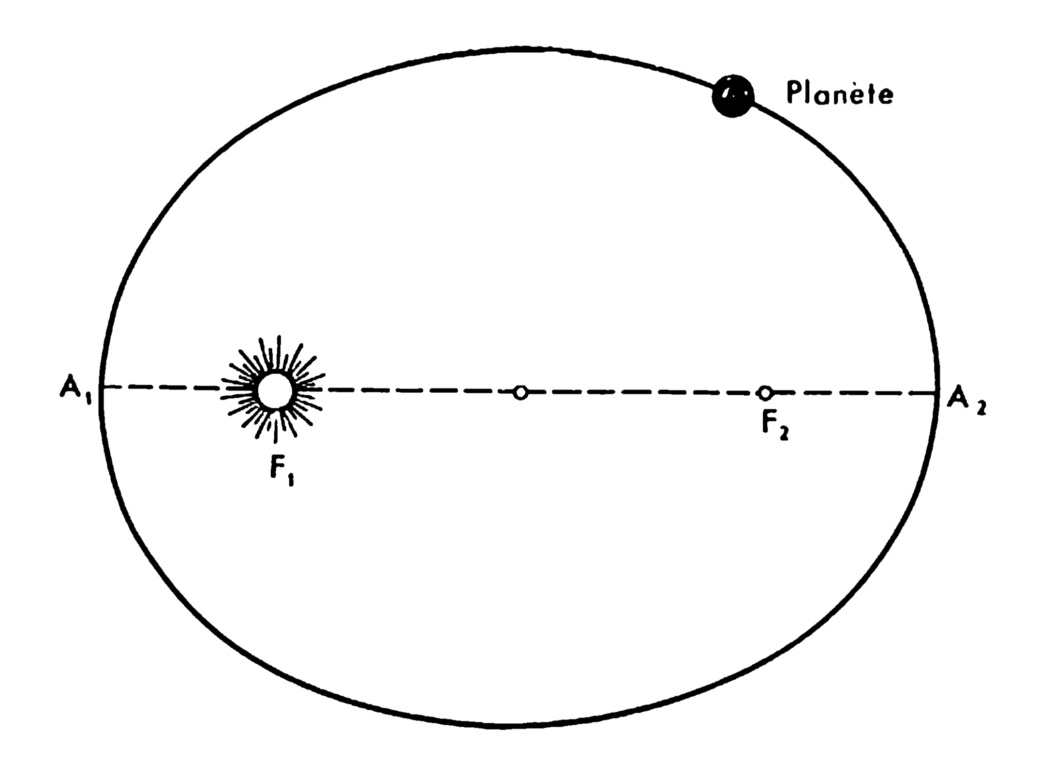


Fig. 11

Cette pointe décrit sur le papier une portion de la ligne appelée *parabole*. Pour obtenir une plus grande partie de cette courbe, il faut prendre une équerre à côté plus long et, si nécessaire, une règle plus longue. La parabole est constituée d'une branche s'étendant à l'infini.

Le point F est appelé *foyer* de la parabole ; la perpendiculaire abaissée du foyer sur la droite D_1D_2 (appelée *directrice*) et prolongée est l'axe de symétrie de la parabole : elle s'appelle simplement *axe* de la parabole.

8 Si l'on courbe en arc de parabole une étroite bande de métal parfaitement poli, les rayons d'une source lumineuse ponctuelle située au foyer deviennent parallèles à l'axe après s'être réfléchis sur la bande de métal (fig. 13). Inversement, si un faisceau de rayons parallèle à l'axe de la parabole tombe sur notre bande de métal, les rayons réfléchis se rassembleront en son foyer.

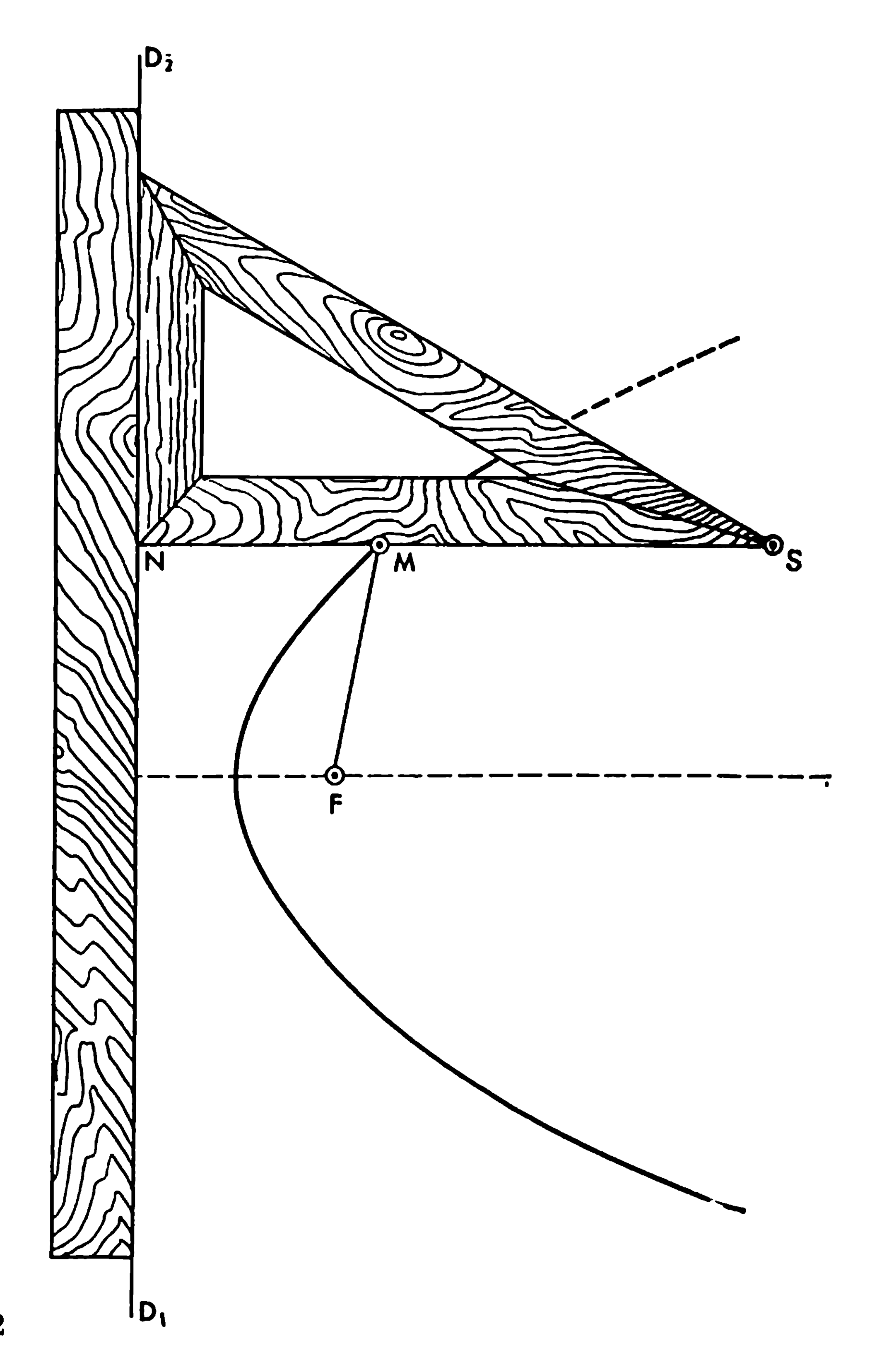


Fig. 12

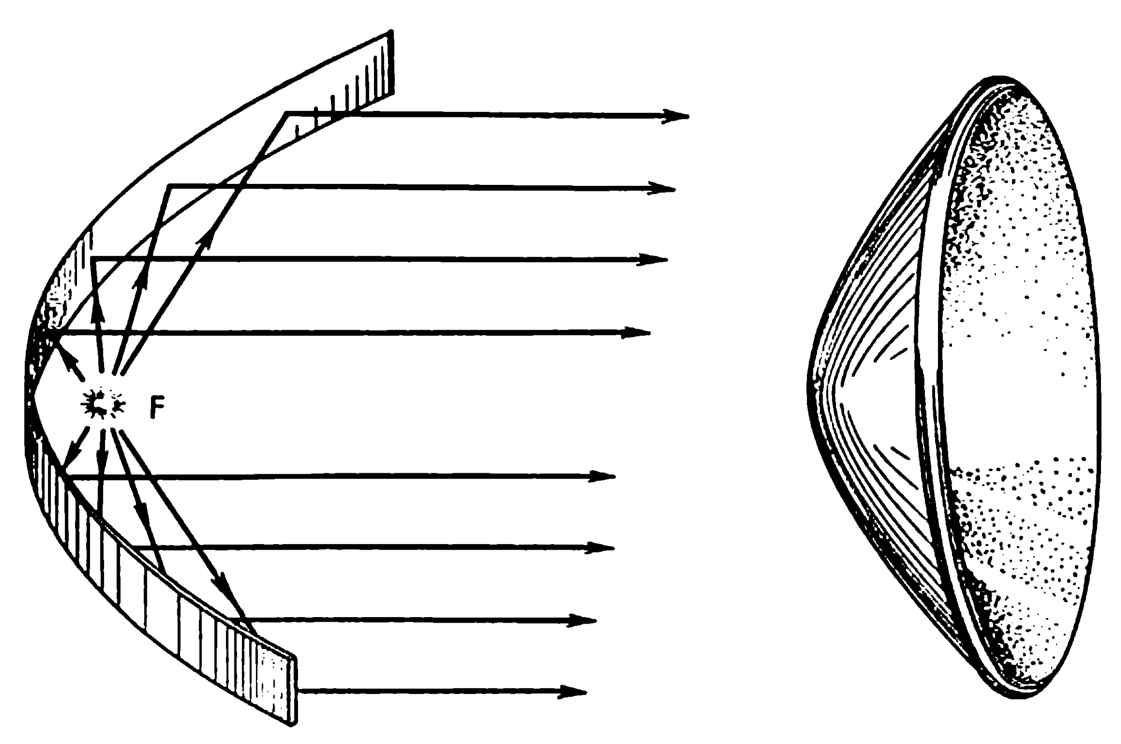


Fig. 13 Fig. 14

C'est sur cette propriété qu'est basé le réflecteur parabolique utilisé dans les phares d'autos (fig. 14), et d'une façon générale dans les projecteurs. Toutefois, ils ne sont pas polis par bandes, mais suivant ce qu'on appelle un *paraboloïde de révolution*. On obtient la surface d'un miroir de ce genre par rotation de la parabole autour de son axe.

9 Une pierre qui n'est pas lancée d'une façon rigoureuse verticalement suit une parabole (fig. 15) ; il en est de même pour un obus. Il est vrai que dans l'un et l'autre cas, l'air déforme la parabole et qu'on a affaire, en fait, à une autre courbe. Mais en observant ce mouvement dans le vide, nous aurions une véritable parabole.

Si pour une même vitesse initiale v du projectile sortant de la bouche du canon, on donne au tube des angles d'inclinaison différents par rapport à l'horizon, le projectile décrira des paraboles différentes et atteindra des distances diffé-

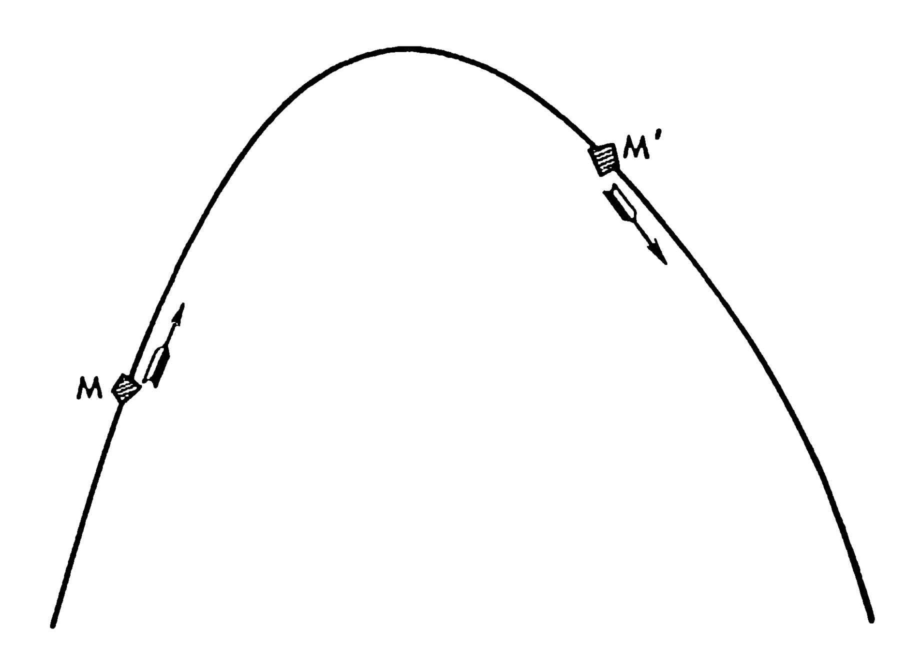


Fig. 15

rentes. Sa portée sera maximale pour une inclinaison du tube égale à 45°. Cette distance sera égale à $\frac{v^2}{g}$, où g est l'accélération de la force de pesanteur. Si on tire en l'air verticalement, le projectile s'élèvera à une hauteur deux fois moins grande que la portée maximale : $\frac{v^2}{2g}$. Que nous tournions d'une façon ou d'une autre le tube du canon (en le maintenant dans le même plan vertical), pour une vitesse donnée de lancement du projectile, il y aura toujours des points sur la terre et dans l'air que le projectile ne pourra atteindre. Il s'avère que ces points sont également séparés de ceux qu'avec une visée appropriée le projectile peut atteindre par une *parabole dite de sécurité* (fig. 16).

10 Par analogie avec l'ellipse, on peut construire des courbes décrites par le point M de façon que reste invariable, non pas la somme, mais la différence des distan-

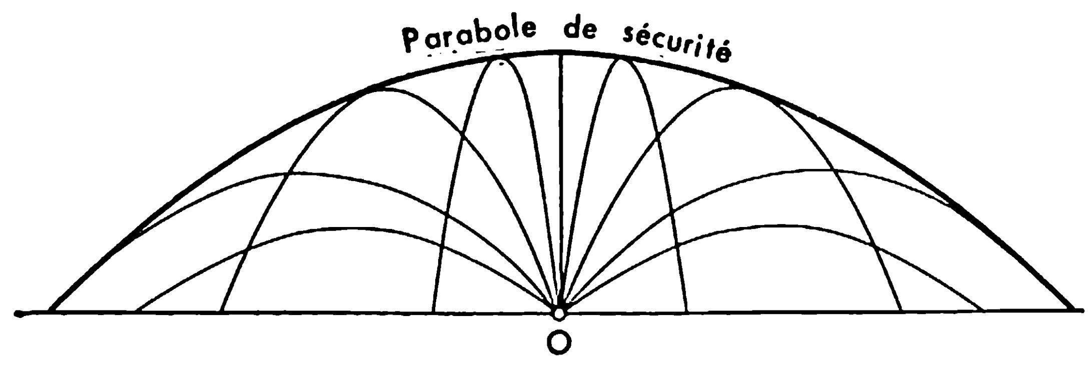


Fig 16.

ces à deux points F_1 et F_2 déterminés, ou leur produit ou, enfin, le quotient de ces distances (dans ce dernier cas, on obtient un cercle).

Examinons le cas de la différence. Pour obliger le crayon à se mouvoir de la façon voulue, piquons en chacun des points F_1 et F_2 une épingle et attachons à l'une d elles une règle de sorte que celle-ci puisse tourner sur le papier autour de l épingle (fig. 17). A l'extrémité S de la règle, fixons un bout du fil (ce fil doit être plus court que la règle): son autre bout doit être fixé en F_2, puis on tend le fil en l'appuyant contre la règle par la pointe M du crayon. La différence des distances MF_1 et MF_2 sera alors égale à:

$$(MF_1 + MS) - (MF_2 + MS) = F_1S - (MF_2 + MS),$$

c'est-à-dire qu'elle sera égale à la différence entre la longueur de la règle et celle du fil. Si l on fait tourner la règle autour de F_1 en continuant à appuyer le crayon contre elle et à tendre le fil, le crayon décrit sur le papier une courbe pour chaque point de laquelle la différence des distances des points F_1 et F_2 sera la même et égale à la différence m entre la longueur de la règle et celle du fil. On n'obtient de cette manière que la moitié supérieure de la courbe représentée à droite sur la fig. 17. Pour obtenir la moitié inférieure, il faut fixer la règle de façon qu'elle se trouve non pas au-dessus,

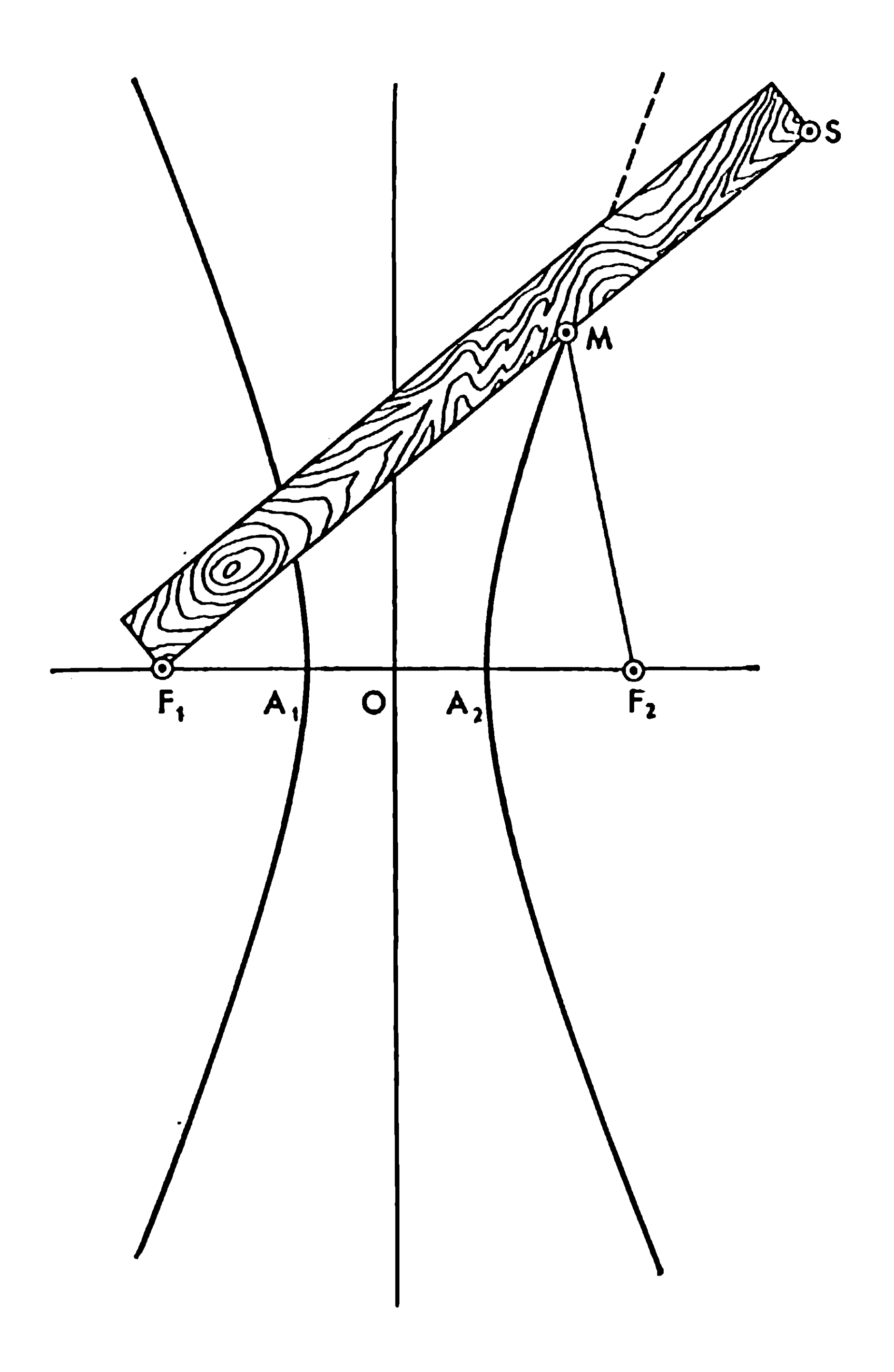


Fig. 17

mais au-dessous des épingles. Enfin, quand on fixe la règle à l'épingle F_2 et le bout du fil à l'épingle F_1, on obtient la partie de la courbe représentée à gauche sur la même figure. Les deux courbes construites sont considérées comme des branches d'une seule courbe appelée *hyperbole*. D'ailleurs, les arcs des courbes tracés ne représentent pas l hyperbole entière. En prenant une règle plus longue et en allongeant en même temps le fil (mais de sorte que la différence de leurs longueurs ne varie pas), nous pourrions prolonger à l'infini notre hyperbole, tout comme l on peut, par exemple, prolonger indéfiniment un segment de droite.

11 Menons une droite par les foyers de l'hyperbole. Cette droite est l'axe de symétrie de l hyperbole. L'autre axe de symétrie est perpendiculaire au premier et passe par le milieu du segment F_1F_2. Le point d'intersection des axes O est le centre de symétrie; il s'appelle simplement *centre* de l'hyperbole. Le premier axe coupe l hyperbole en deux points A_1 et A_2 appelés *sommets* de l hyperbole; le segment A_1A_2 s'appelle *axe réel* de l hyperbole. La différence entre les distances du point A_1 de l'hyperbole aux foyers F_2 et F_1 doit être égale à m:

$$A_1F_2 - A_1F_1 = m.$$

Mais

$$A_1F_1 = A_2F_2,$$

en raison de la symétrie de l'hyperbole; c'est pourquoi on peut remplacer A_1F_1 par A_2F_2 et nous aurons:

$$A_1F_2 - A_2F_2 = m.$$

Il est évident que la différence $A_1F_2 - A_2F_2$ est égale à A_1A_2, c'est-à-dire à la longueur de l'axe réel de l'hyperbole. Ainsi, la différence m entre les distances de tout point de l'hyperbole à ses foyers (en retranchant de la plus grande distance la plus petite) est égale à la longueur de l'axe réel de l'hyperbole.

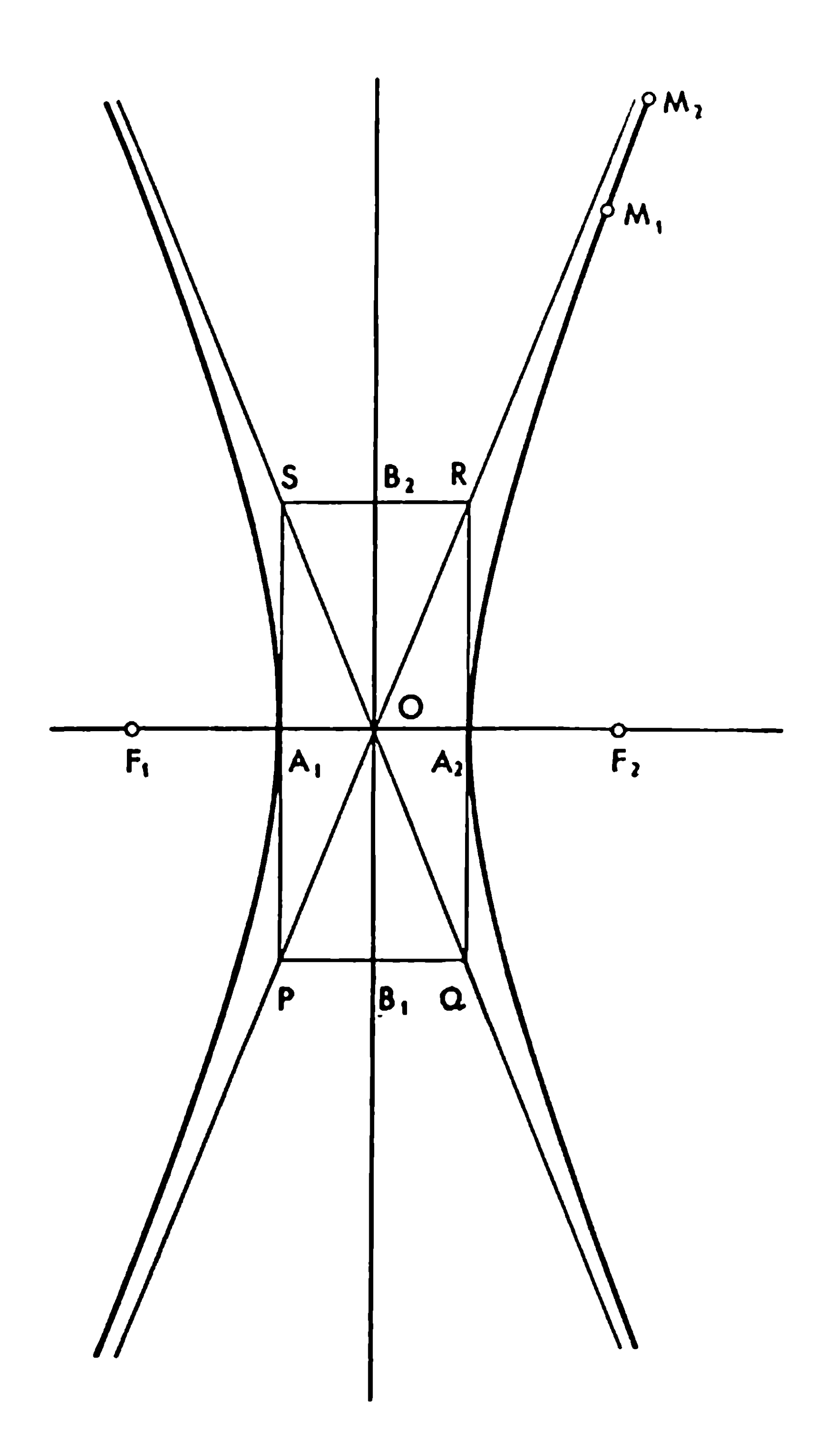


Fig. 18

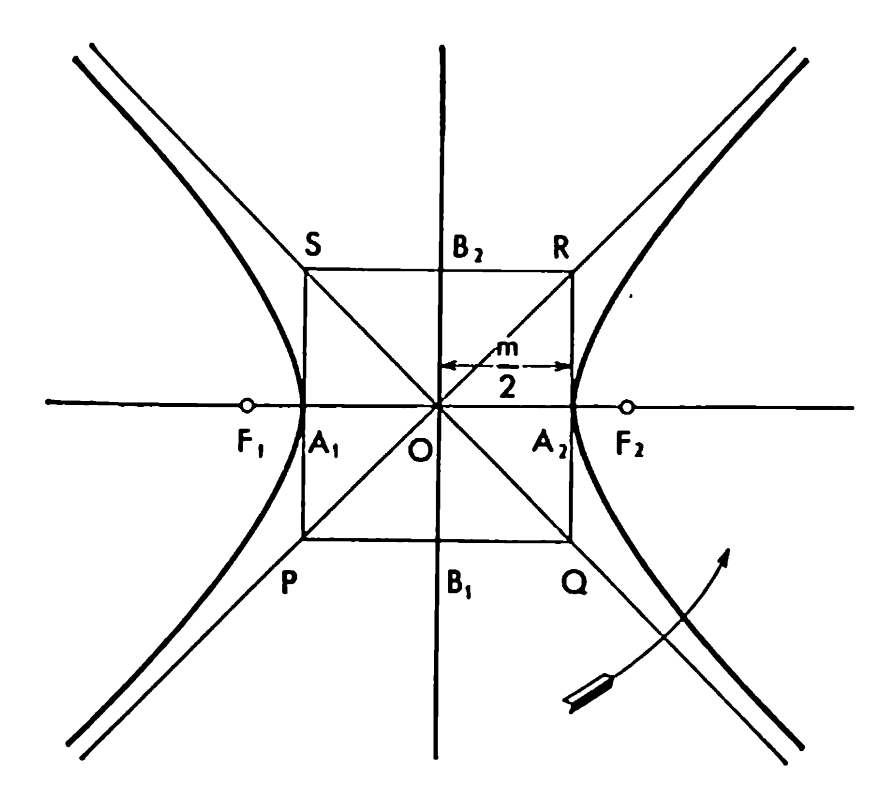


Fig. 19

Cherchons les intersections du deuxième axe de symétrie de l'hyperbole avec l'arc de circonférence de rayon égal à la moitié de F_1F_2 et mené à partir du sommet A_1 (ou du sommet A_2). Nous trouvons deux points B_1 et B_2 (fig. 18) ; le segment B_1B_2 s'appelle l'*axe imaginaire* de l'hyperbole. Construisons ensuite le rectangle $PQRS$, dont les côtés sont parallèles aux axes de l'hyperbole et passent par les points A_1, A_2, B_1, B_2 et menons ses diagonales PR et QS. En les prolongeant indéfiniment, nous obtenons deux droites appelées *asymptotes* de l'hyperbole. Elles possèdent la propriété remarquable de ne jamais rencontrer l hyperbole, bien que les points de l'hyperbole se rapprochent des asymptotes aussi près qu'on le veut et d'autant plus près que ces points sont plus éloignés du centre de l hyperbole. Sur la figure, les arcs de l hyperbole compris entre deux points éloignés de centre ressemblent presque à un segment de

droite (voir l'arc $\overset{\frown}{M_1M_2}$, fig. 18), bien qu'en réalité ils ne soient rectilignes nulle part; leur courbure est simplement insignifiante, c'est pourquoi elle est presque imperceptible.

Pour représenter approximativement une hyperbole sans recourir à une construction exacte au moyen d'une règle et d'un fil, on opère de la façon suivante. On commence par représenter les axes de symétrie de l'hyperbole; puis on marque sur le premier les foyers F_1 et F_2 à des distances égales du centre; ensuite, on porte des deux côtés du centre sur le même axe des segments égaux à la moitié de m, c'est-à-dire à la moitié de la différence donnée des distances des points de l hyperbole à ses foyers, ce qui donne les sommets A_1 et A_2 de l'hyperbole; enfin, on trouve sur le deuxième axe par intersections les points B_1 et B_2, on construit le rectangle $PQRS$, on mène et on prolonge ses diagonales. On obtient le dessin représenté fig. 19. Il ne reste plus qu'à tracer à la main deux arcs symétriques par rapport aux axes, passant par les points A_1 et A_2, s'incurvant graduellement et se rapprochant de plus en plus des asymptotes PR et QS.

12 Un cas particulier est à considérer quand le rectangle $PQRS$ est un carré. Cela se produit à la condition, et seulement à la condition, que les asymptotes de l'hyperbole soient réciproquement perpendiculaires. Une telle hyperbole est *équilatère*. C'est le cas représenté fig. 19. Pour plus de commodité, faisons tourner le dessin de 45° autour du point O, dans la direction indiquée par la flèche; nous obtenons l'hyperbole de la fig. 20. Portons sur l'asymptote OQ un segment quelconque $ON = x$ et élevons au point N la perpendiculaire $NM = y$ jusqu'à son intersection avec l'hyperbole. Il existe entre x et y une relation simple: quand x augmente, y diminue d'autant; de même, quand x diminue, y augmente d'autant. En d'autres termes, la longueur $NM = y$ est inversement proportionnelle à la longueur

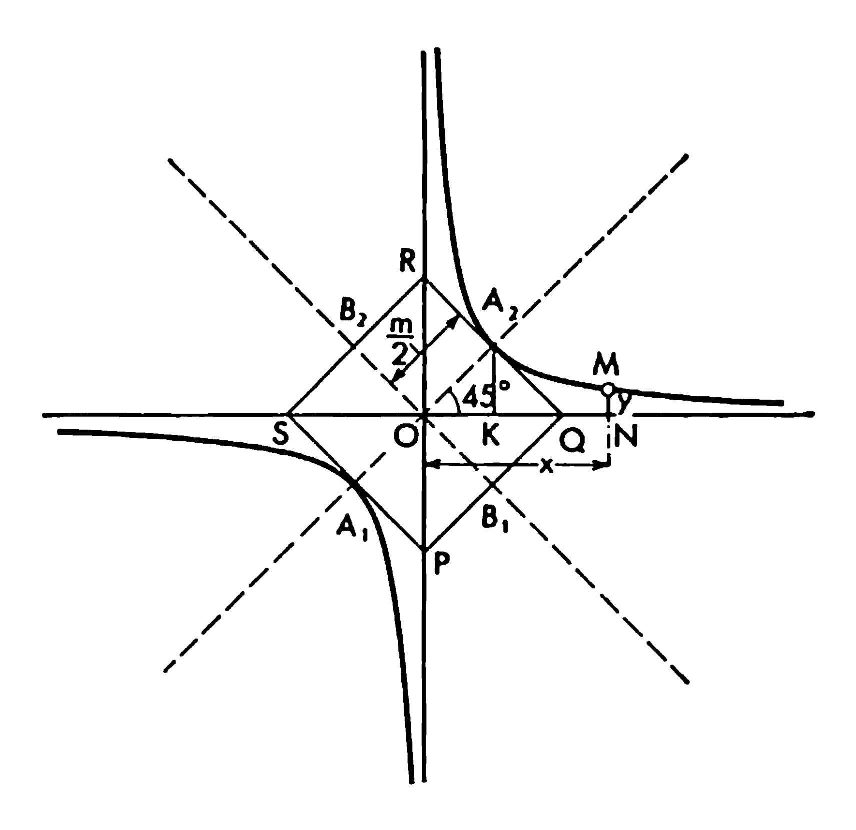


Fig. 20

$ON = x$:

$$y = \frac{k}{x}$$

Grâce à cette propriété, une hyperbole équilatère est le graphique d'une proportionnalité inverse. Afin d'éclaircir comment le coefficient de proportionnalité inverse k est lié aux dimensions de l hyperbole, examinons le sommet A_2. Pour lui :

$$x = OK, \quad y = KA_2;$$

les segments OK et KA_2 sont les côtés d'un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse :

$$OA_2 = \frac{m}{2},$$

c'est pourquoi

$$x = y \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4},$$

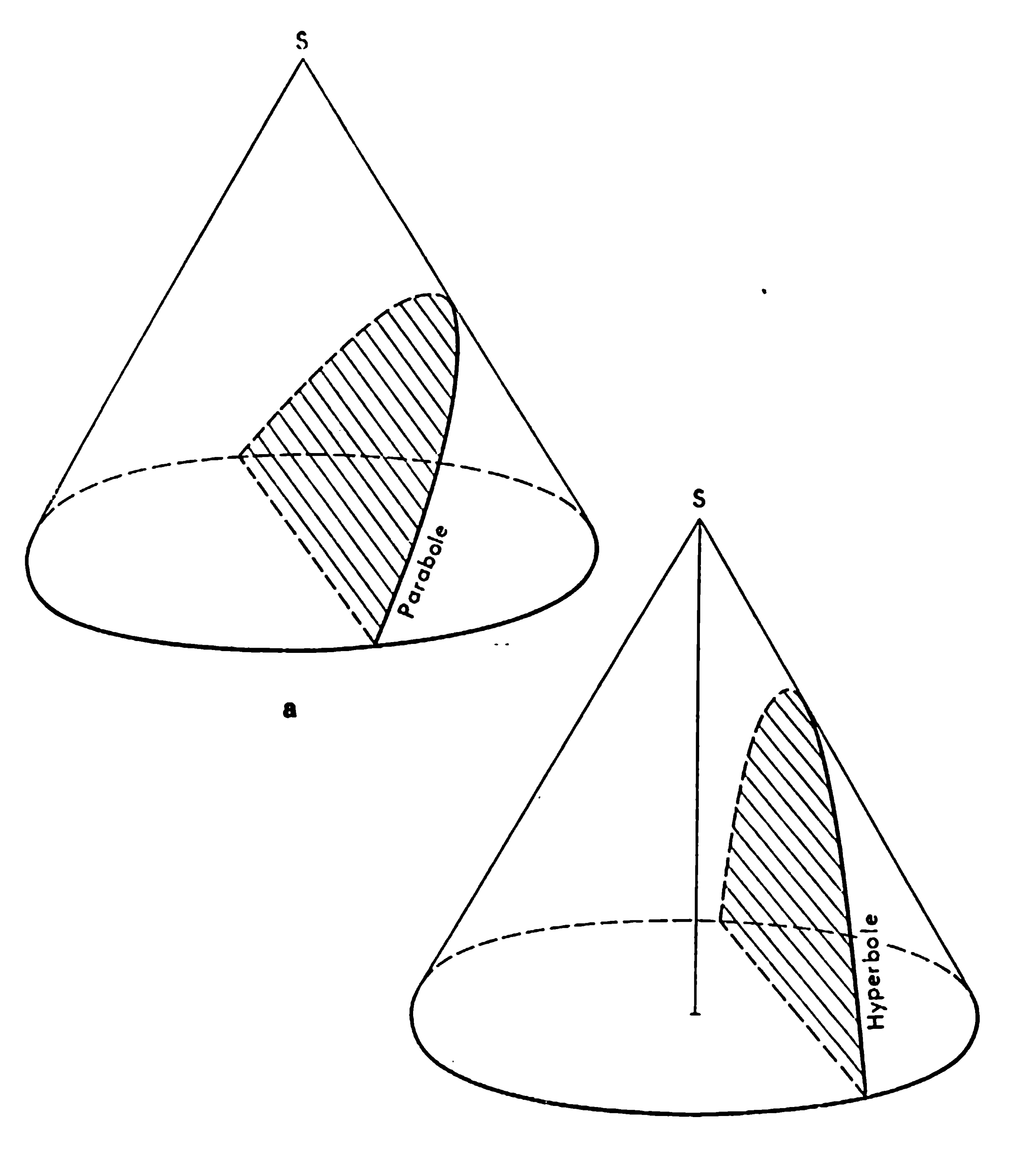


Fig. 21

d'où $2x^2 = \frac{m^2}{4}$, ou $x^2 = \frac{m^2}{8}$. D'autre part, il découle du rapport de proportionnalité inverse $y = \frac{k}{x}$ que $xy = k$, ou dans le cas donné (où $y = x$)

$$x^2 = k.$$

En comparant les deux résultats $x^2 = \frac{m^2}{8}$ et $x^2 = k$, nous trouvons:

$$k = \frac{m^2}{8}.$$

Autrement dit, le coefficient de proportionnalité inverse k est égal au huitième du carré de la longueur de l'axe réel de l hyperbole.

13 Nous avons déjà dit qu'en coupant un cône avec un couteau, c'est-à-dire pour parler géométriquement, si nous le sectionnons par un plan sans trancher sa base, le contour de la section sera une ellipse (voir fig. 10). Il s'avère que si nous coupons un cône par un plan de façon que celui-ci sectionne la base du cône, on obtient dans le plan sécant soit un arc de parabole (fig. 21, *a*), soit un arc d'hyperbole (fig. 21, *b*). Ainsi donc, les trois courbes — ellipse, hyperbole et parabole — sont des sections coniques.

Le cône sectionné a l'inconvénient que seule l'ellipse peut contenir entièrement dans le plan sécant (voir fig. 10), alors que la parabole et l'hyperbole, courbes s'étendant à l'infini, n'y sont représentées que partiellement. La fig. 21, *b* ne montre même pas d'où part la deuxième branche de l'hyperbole. Pour éviter cette imperfection, remplaçons le cône par une surface conique s'étendant à l'infini. Dans ce but, prolongeons à l infini des deux côtés toutes les génératrices du cône, c'est-à-dire tous les segments rectilignes AS, BS, CS, DS, ES, etc. réunissant les points de la circonférence de la base du cône à son sommet (fig. 22); naturellement, nous ne pouvons représenter sur notre dessin les génératrices prolongées indéfiniment, c'est pourquoi

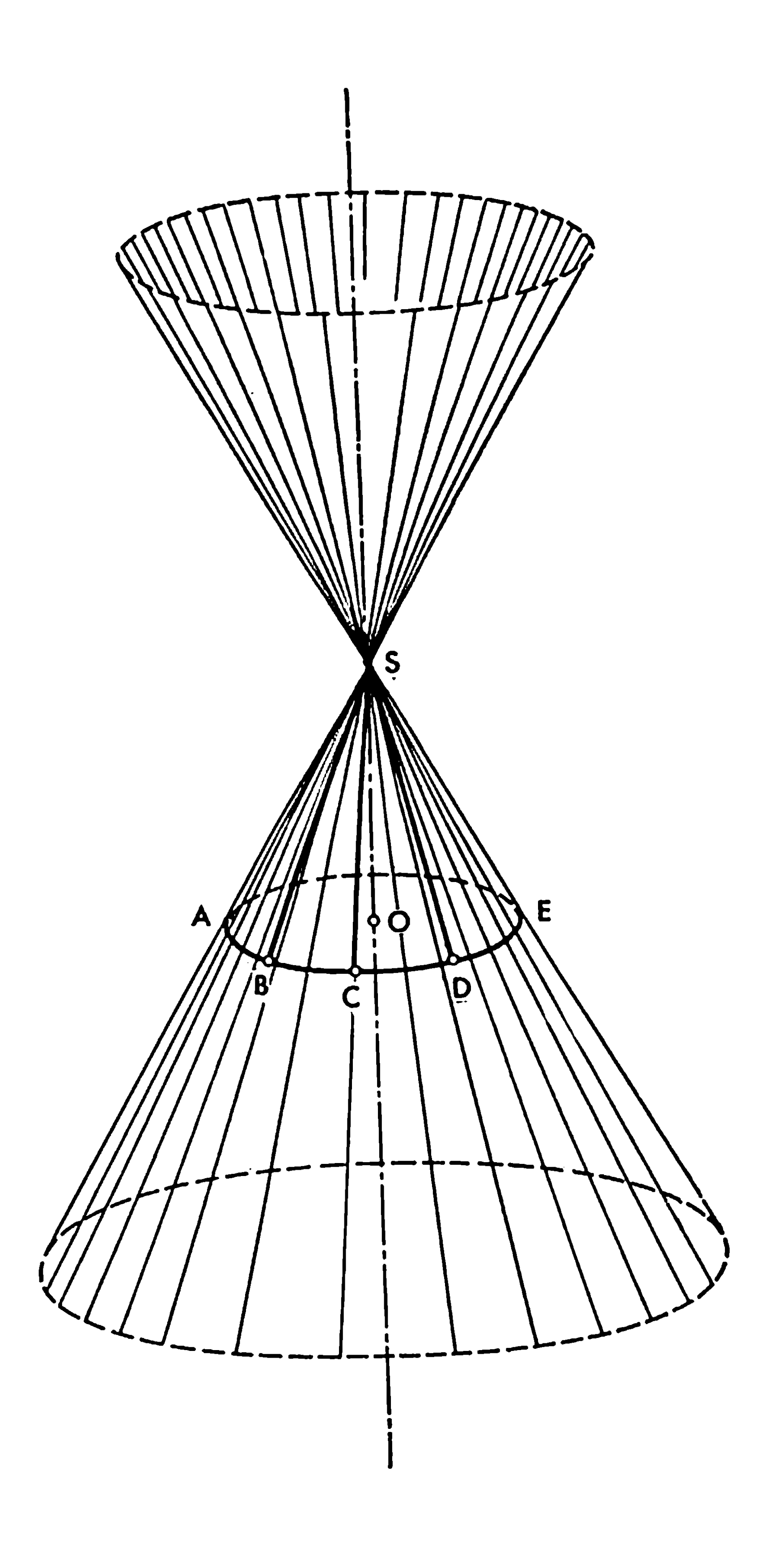


Fig. 22

3–0908

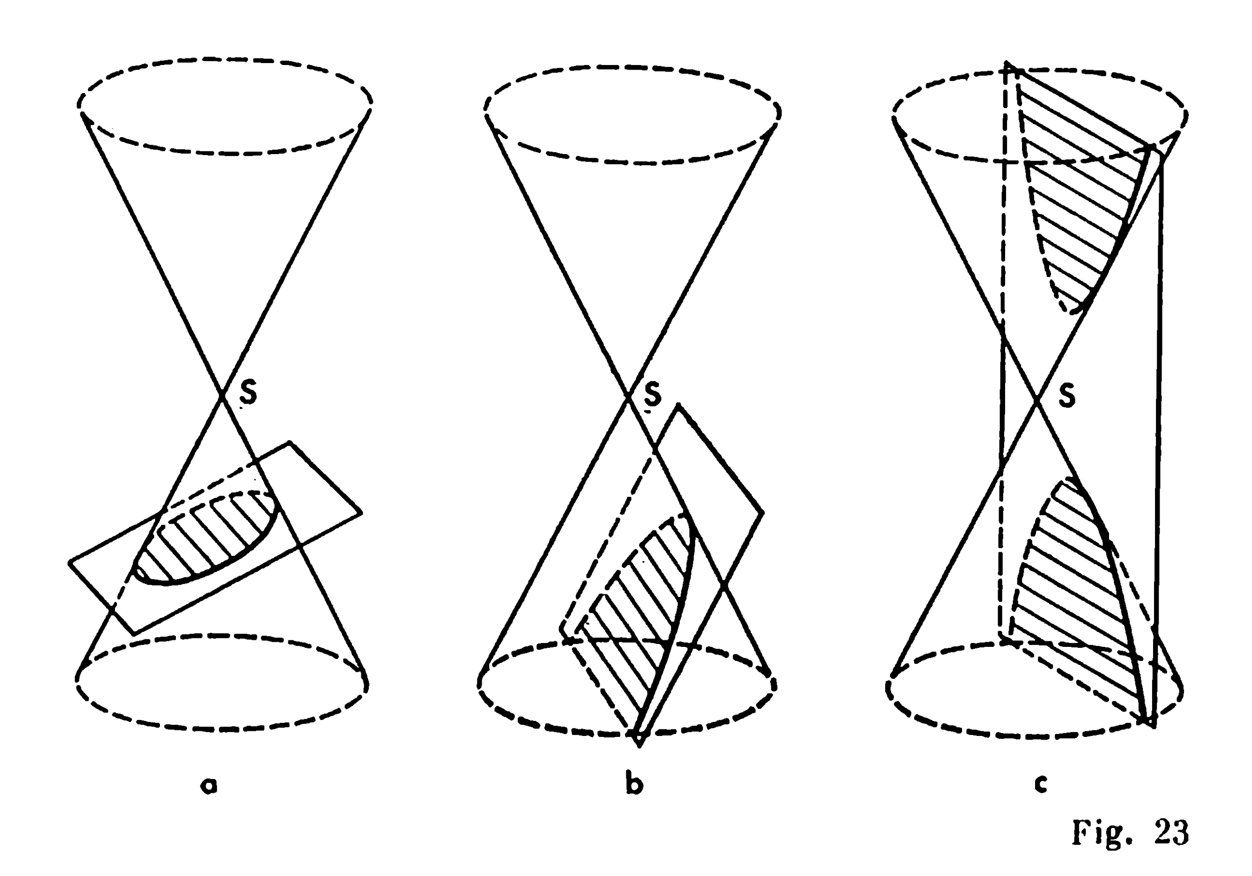


Fig. 23

nous traçons comme précédemment des segments de droites, à cette seule différence qu'ils sont plus longs qu'auparavant. Nous obtenons ainsi la surface conique voulue, constituée de deux moitiés rattachées entre elles au point S et s'étendant à l'infini, ou comme on dit deux *nappes*. La surface conique tout entière peut être considérée comme la trace laissée par une droite, ou plus précisément une droite passant par le point S et tournant de façon que l'angle qu'elle fait avec la droite OS — axe de la surface conique — reste constant. Cette droite qui se meut est appelée *génératrice* de la surface conique; il est évident que chacune des génératrices du cône pris pour commencer forme, une fois prolongée, une génératrice de surface conique.

Coupons maintenant par un plan la surface conique tout entière. Si le plan coupe toutes les génératrices dans les limites d'une nappe, la section obtenue est une ellipse (dans un cas particulier, un cercle, fig. 23, *a*); s'il coupe

toutes les génératrices à l'exception d'une (qui lui est parallèle), la section obtenue est une parabole (fig. 23, *b*) : enfin, si le plan coupe une partie des génératrices dans les limites d'une nappe et l'autre partie dans les limites de l'autre nappe, la section obtenue est une hyperbole (fig. 23, *c*). Nous voyons que l'ellipse et la parabole tiennent entièrement sur une moitié de surface conique. Tandis que l'hyperbole a besoin de la surface conique tout entière : une branche de l'hyperbole se trouve dans une moitié de la surface; l'autre, dans la deuxième moitié.

14 Considérons la courbe décrite sur le plan par un point M de façon que le produit des distances de ce point à deux points déterminés F_1 et F_2 du même plan reste constant. Une telle courbe est appelée *lemniscate* (ce qui en grec signifie « en ruban »). Soit c la longueur du segment F_1F_2, la distance du milieu O du segment F_1F_2 à F_1 et F_2 est égale à $\frac{c}{2}$ et le produit de ces distances, égal à $\frac{c^2}{4}$. Exigeons d'abord que la grandeur p du produit invariable soit justement égale à $\frac{c^2}{4}$, c'est-à-dire que :

$$MF_1 \cdot MF_2 = \frac{c^2}{4} ;$$

le point O se trouvera alors sur la lemniscate et celle-ci prendra l'aspect d'un « huit couché » (fig. 24). Si l'on prolonge le segment F_1F_2 des deux côtés jusqu'à son intersection avec la lemniscate, on obtient deux points A_1 et A_2. Il est facile d'exprimer la distance entre eux $A_1A_2 = x$ en fonction de la distance connue $F_1F_2 = c$. Pour cela, notons que la distance du point A_2 à F_2 est égale à $\frac{x}{2} - \frac{c}{2}$, et que la distance de ce même point A_2 à F_1 est égale à $\frac{x}{2} + \frac{c}{2}$; c'est pourquoi le produit des distances sera :

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{c}{2}\right) = \frac{x^2}{4} - \frac{c^2}{4}.$$

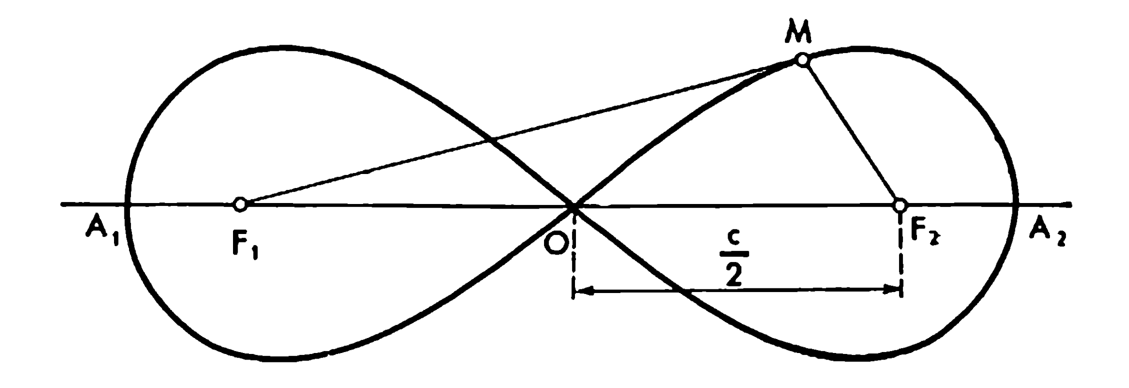


Fig. 24

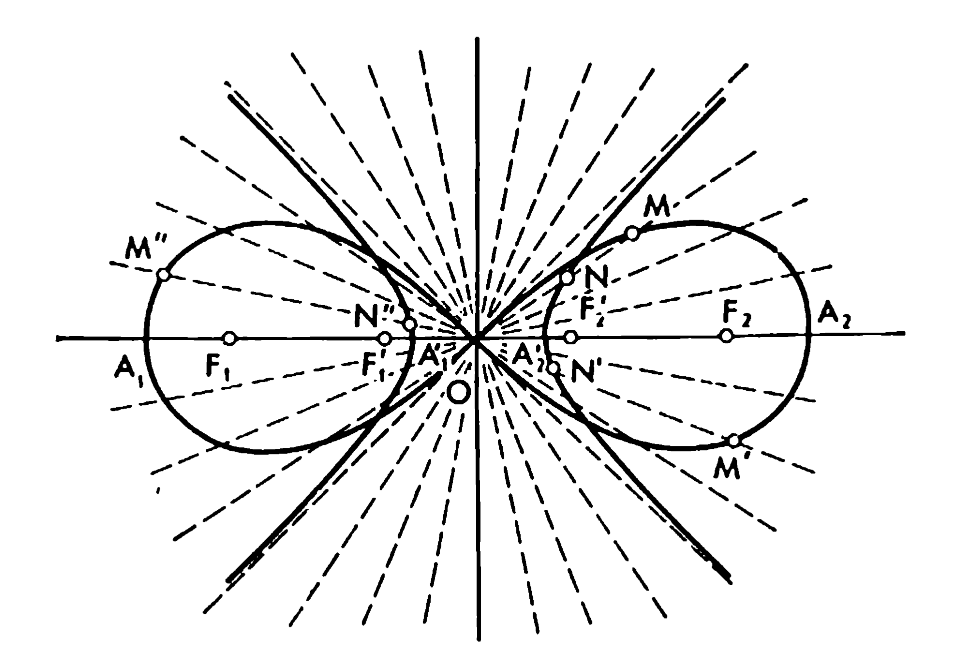


Fig. 25

Mais nous avons posé que le produit par définition est égal à $\frac{c^2}{4}$; il en découle:

$$\frac{x^2}{4}-\frac{c^2}{4}=\frac{c^2}{4}, \quad \text{d'où}$$

$$x^2=2c^2 \quad \text{et} \quad x=\sqrt{2}\,c\approx 1{,}414c.$$

Il existe une relation remarquable entre cette lemniscate et l'hyperbole équilatère. Menons à partir du point O des rayons rectilignes dans différentes directions (fig. 25) et marquons les points de leur intersection avec la lemniscate. Il s'avère que tant que l'angle de pente du rayon par rapport à OF_2 (ou OF_1) est inférieur à 45°, ce rayon recoupe la lemniscate en un autre point différent de O; si l'angle de pente du rayon est égal ou supérieur à 45°, le deuxième point d'intersection n'existe pas. Soit un rayon quelconque du premier groupe et admettons qu'il recoupe la lemniscate au point M (différent de O); portons sur ce rayon à partir du point O le segment $ON=\frac{1}{OM}$. Si on répète cette construction pour chaque rayon du premier groupe, les points N correspondant aux points M de la lemniscate se trouvent tous sur une hyperbole équilatère dont les foyers sont les points F_1' et F_2' définis par les relations:

$$OF_1'=\frac{1}{OF_1} \quad \text{et} \quad OF_2'=\frac{1}{OF_2}.$$

15 Si le produit constant p est différent de $\frac{c^2}{4}$, la lemniscate prend un autre aspect. Dans le cas où p est inférieur à $\frac{c^2}{4}$, la lemniscate est constituée de deux ovales dont l'un contient le point F_1 et l'autre le point F_2 (fig. 26). Dans le cas où le produit p est supérieur à $\frac{c^2}{4}$, mais inférieur à $\frac{c^2}{2}$, la lemniscate prend la forme d'un éclair (fig. 27).

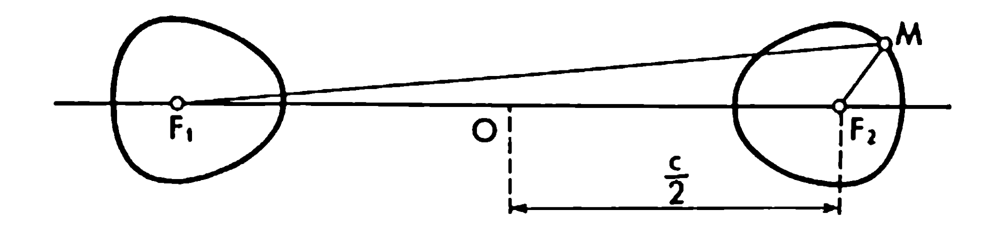


Fig. 26

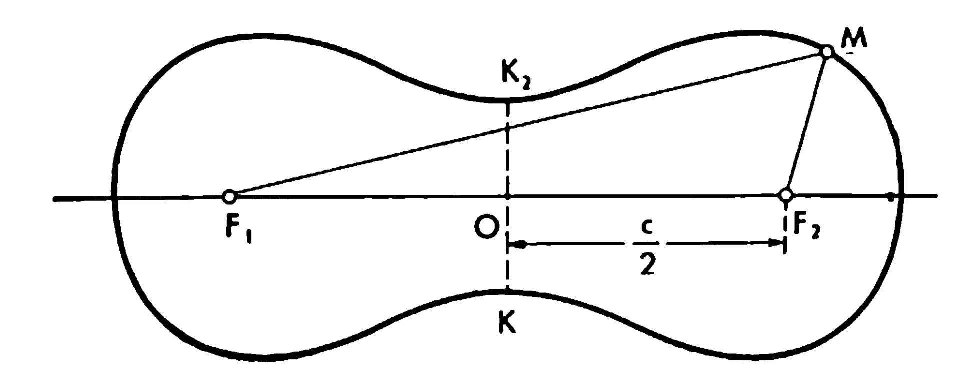


Fig. 27

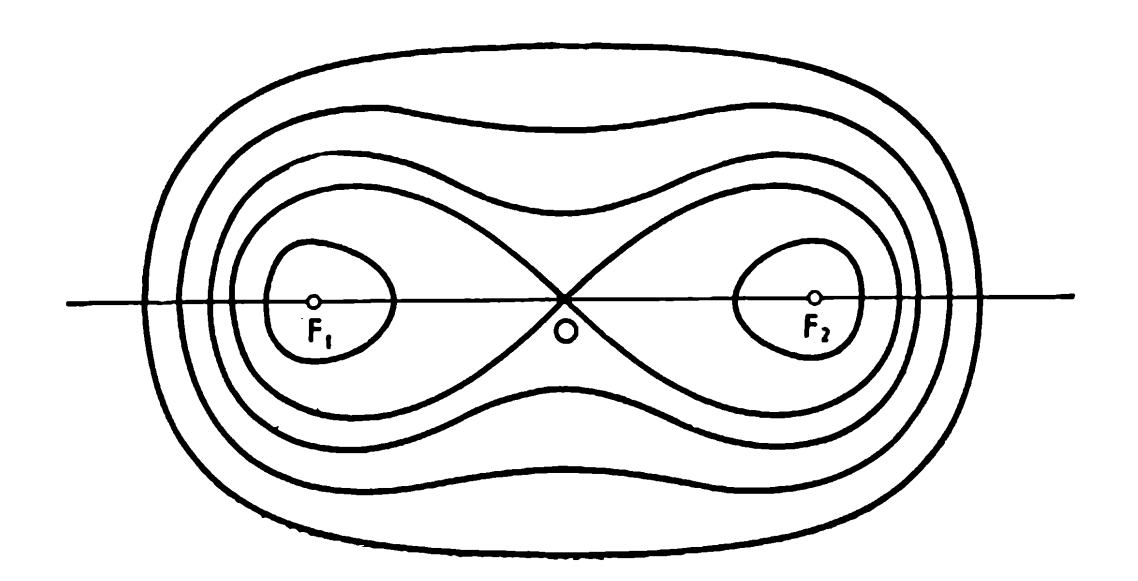


Fig. 28

Si p diffère peu de $\frac{c^2}{4}$, la « taille » de l'éclair K_1K_2 s'amincit et la courbe se rapproche de la forme en « huit couché ». Si p diffère peu de $\frac{c^2}{2}$, la « taille » de l'éclair n'est presque pas marquée et quand p est égal ou supérieur à $\frac{c^2}{2}$, la « taille » de l'éclair disparaît complètement et la lemniscate prend la forme d'un ovale (fig. 28; pour permettre la comparaison, on a représenté également d'autres formes de lemniscates).

16 Prenons maintenant dans le plan un nombre quelconque de points

$$F_1, F_2, \ldots, F_n$$

et obligeons le point M à se mouvoir de manière que le produit des distances de M à chacun des points considérés reste constant. Nous obtenons une courbe dont la forme dépendra de la position des points $F_1, F_2, \ldots, F_n$ par rapport les uns aux autres et de la grandeur du produit constant. Cette courbe est appelée *lemniscate à n foyers*.

Nous avons examiné plus haut des lemniscates à deux foyers. En choisissant plus de deux foyers, en les disposant de différentes façons et en assignant des valeurs variées au produit des distances, on peut obtenir des lemniscates de contours les plus curieux. Faisons glisser la pointe du crayon sans la soulever du papier d'un certain point A de façon qu'elle revienne au point de départ A. Elle décrit alors une certaine courbe; nous exigeons seulement que cette courbe ne se recoupe jamais. Il est évident que cette façon de procéder permet d'obtenir des courbes représentant, par exemple, le contour d'une tête d'homme ou d'un oiseau (fig. 29). Il se trouve qu'à une telle courbe librement tracée on peut associer un nombre n, des positions de foyers F_1, $F_2, \ldots, F_n$ et assigner au produit invariable des distances

$$MF_1 \cdot MF_2 \cdot \ldots \cdot MF_n = p$$

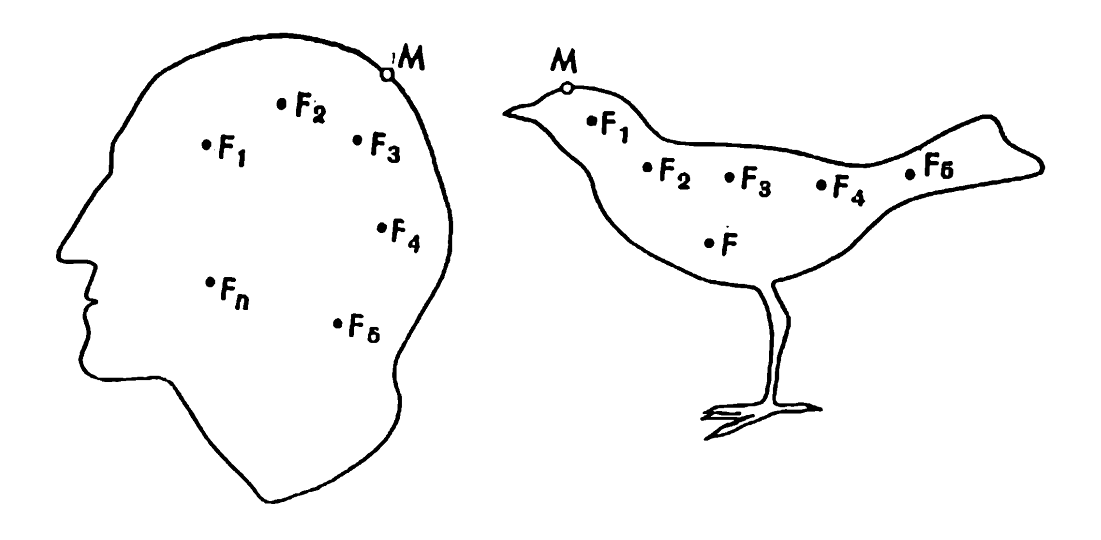


Fig. 29

une valeur telle que la lemniscate obtenue ne se distinguera pas de visu de cette courbe. Autrement dit, les écarts possibles du point M décrivant la lemniscate par rapport à la courbe dessinée ne dépasseront pas la largeur du trait de crayon (le crayon peut être préalablement finement taillé de façon que le trait soit très mince). Ce fait remarquable qui traduit l'extraordinaire diversité et la richesse des formes de lemniscates à foyers multiples peut être démontré de façon rigoureuse, mais fort compliquée, en faisant appel aux mathématiques supérieures.

17 Appliquons une règle sur le bord inférieur du tableau noir et faisons rouler le long de son bord un cercle en bois ou en carton, en l'appuyant contre la règle et le tableau. Si l'on fixe sur ce cercle un bout de craie (à son point de contact avec la règle), la craie tracera une courbe (fig. 30) appelée *cycloïde*. A chaque tour du cercle correspond une arcade de la cycloïde $MM'M''N$; si le cercle continue

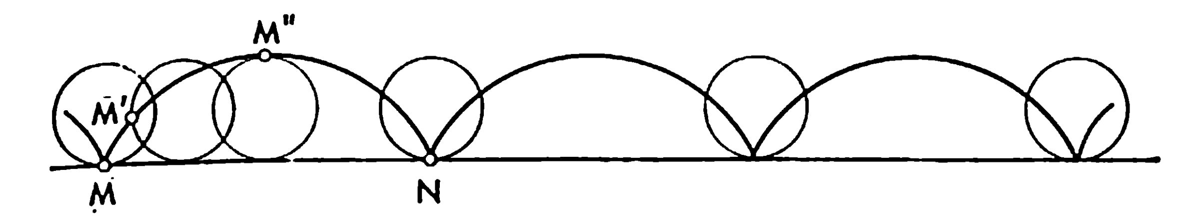


Fig. 30

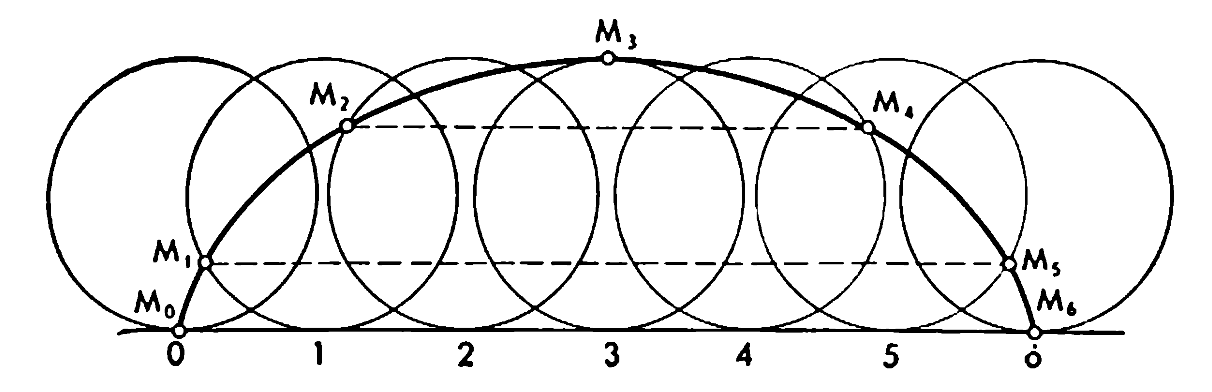


Fig. 31

à rouler, on obtient d'autres arcades de la même cycloïde.

Pour construire approximativement sur le papier une arcade de cycloïde décrite en balançant un cercle de diamètre égal à 3 cm par exemple, portons sur une droite un segment égal à :

$$3 \cdot 3{,}14 = 9{,}42 \text{ cm}.$$

Nous obtenons un segment dont la longueur est égale à la circonférence du cercle de 3 cm de diamètre. Partageons ensuite ce segment en un certain nombre de parties égales, par exemple en 6, et après avoir numéroté ces positions par les nombres :

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

pour chaque point de partage, représentons notre cercle dans la position qu'il prend quand il s'appuie sur ce point (fig. 31). Pour passer d'une position à la suivante, le cercle doit faire un sixième de tour complet (étant donné que la

distance entre les points de partage voisins est égale à un sixième de la circonférence). C'est pourquoi si, en position O, la craie se trouve au point M_0, en position 1 elle se trouvera au point M_1, à un sixième de circonférence du point de contact ; en position 2 — au point M_2 — à deux sixièmes de circonférence du point de contact, etc. Pour obtenir les points M_1, M_2, M_3, etc. il suffit de couper le cercle correspondant, à partir du point de contact, par un rayon de 1,5 cm, de façon à obtenir en position 1 une intersection, en position 2 — deux intersections l'une après l'autre, en position 3 — trois intersections, etc. Pour tracer la cycloïde, il ne reste plus qu'à réunir les points:

$$M_0, \ M_1, \ M_2, \ M_3, \ M_4, \ M_5, \ M_6$$

au jugé, par une courbe régulière.

18 Parmi les nombreuses propriétés remarquables de la cycloïde, notons-en une qui lui a fait accorder la dénomination emphatique et compliquée de « brachystochrone», formée de deux mots grecs signifiant « le plus court » et « temps ».

Examinons la question suivante: quelle forme faut-il donner à une gouttière métallique parfaitement polie réunissant deux points A et B donnés (fig. 32) pour qu'une bille métallique polie roule dans cette gouttière du point A au point B dans le temps le plus court possible? Il semble à première vue qu'il faille s'arrêter à une gouttière rectiligne, de façon que le long de cette gouttière la bille parcoure le plus court chemin de A à B. Cependant, il ne s'agit pas ici du plus court chemin, mais du temps le plus court; or, le temps dépend non seulement de la longueur du trajet, mais encore de la vitesse de la bille. Si l'on courbe la gouttière vers le bas, sa partie commençant au point A aura une descente plus raide que la gouttière rectiligne et la bille en la suivant aura une plus grande vitesse que sur le segment de même longueur de la gouttière rectiligne. Mais si on fait la partie initiale trop raide et relativement longue, la partie

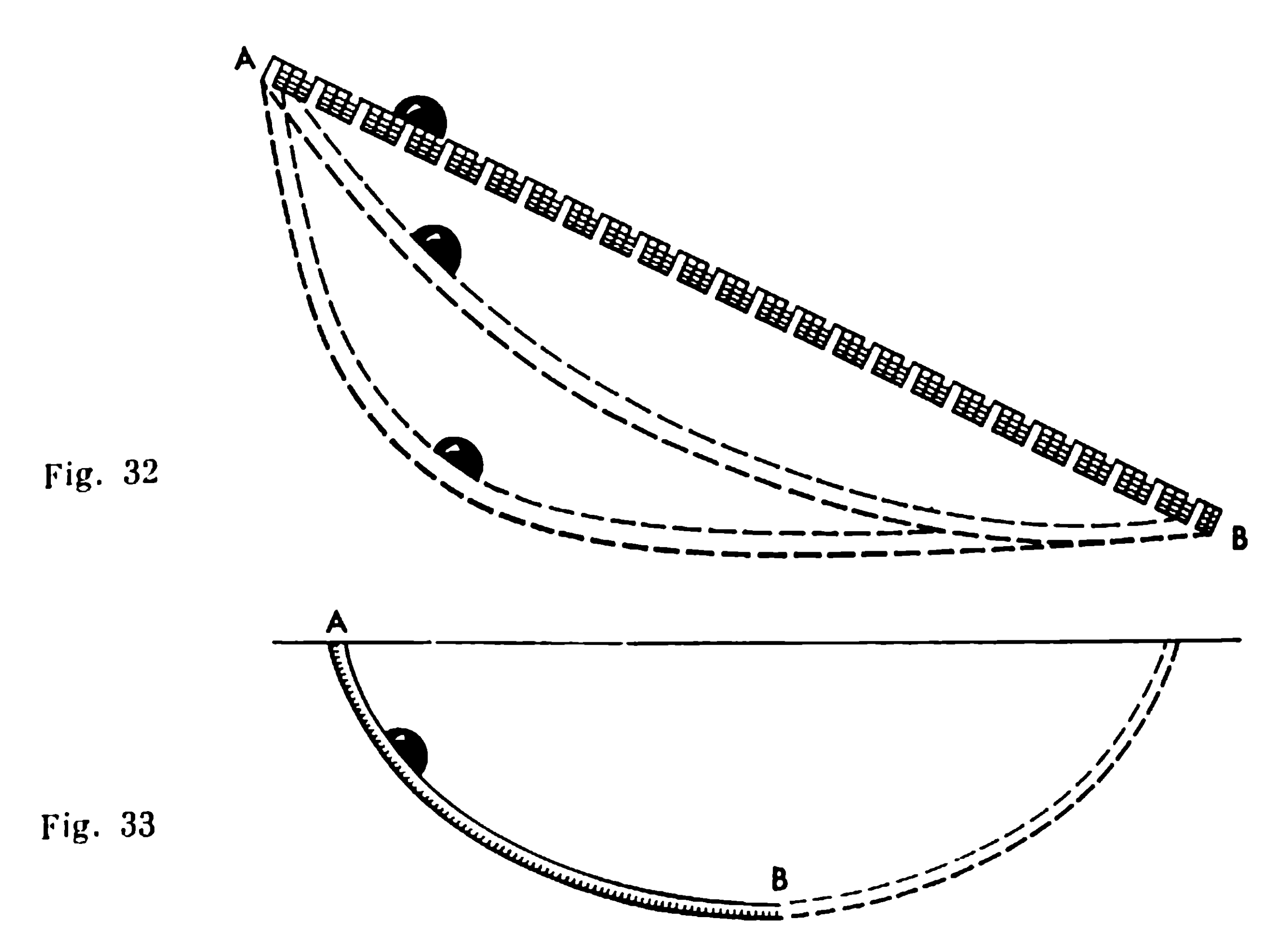


Fig. 32

Fig. 33

voisine du point B aura une pente très douce et sera aussi relativement longue; la bille parcourra rapidement la première partie et très lentement la deuxième et pourra arriver avec du retard au point B. Il faut donc apparemment donner à la gouttière une forme incurvée sans que l'incurvation soit trop marquée.

Galilée (1564-1642), physicien et astronome italien, pensait que la gouttière du temps le plus court doit être incurvée en arc de cercle. Mais les frères Bernoulli, mathématiciens suisses, ont démontré par des calculs précis, il y a 250 ans, qu'il n'en était rien et que la gouttière doit être incurvée en arc de cycloïde (tournée vers le bas, fig. 33). Depuis, la cycloïde a mérité le surnom de brachystochrone et les démonstrations de Bernoulli ont posé les bases d'une nouvelle branche des mathématiques, le calcul des variations. Ce dernier s'occupe de la recherche des courbes pour les-

quelles une quantité quelconque qui nous intéresse prend sa valeur minimale (et dans certaines questions, sa valeur maximale).

19 Nous arrivons à la fin de notre bref exposé sur les courbes remarquables. Nous n'en avons considéré qu'un nombre restreint et n'avons aucunement épuisé toutes leurs propriétés. Et combien de courbes n'ont pas trouvé place dans notre essai : nous n'avons rien dit de la chaînette, ligne suivant laquelle se dispose une chaîne lourde suspendue par ses deux bouts, ni de la spirale d'Archimède glissant suivant une règle tournant régulièrement, ni du développement du cercle décrit par l'extrémité d'un fil fin se dévidant d'une bobine, etc. Nous nous sommes proposés seulement d'éveiller l'intérêt du lecteur, familiarisé avec des éléments de mathématiques, pour certains faits curieux de l'immense trésor des connaissances mathématiques. Notre règle était d'éviter les démonstrations et les longs calculs.

Le lecteur, désireux d'élargir les connaissances acquises ici, pourra lire le livre du mathématicien polonais Steinhaus [1]) (ne comportant pas également de démonstrations) ou celui plus détaillé, d'un vulgarisateur des mathématiques aujourd'hui décédé, G. N. Berman [2]) où il trouvera les démonstrations de nombreux faits mentionnés dans la présente brochure et dans le livre de Steinhaus.

---

[1]) G. STEINHAUS, Kaléïdoscope mathématique, Moscou, 1950.
[2]) G. N. BERMAN, La cycloïde (une courbe remarquable et certaines autres qui lui sont rattachées), Moscou, 1948.

Aires
et logarithmes

1 Soit donnée une certaine fonction. Cela signifie qu'on montre l'opération qui permet pour chaque valeur de x de trouver la valeur y (valeur de la fonction) correspondante à cette valeur de x. Le plus souvent les fonctions sont données par des relations. Par exemple, la relation $y = x^2$ définit y comme fonction de x. Ici, pour chaque nombre x (par exemple, $x = 3$) la valeur correspondante de y est obtenue en élevant ce nombre au carré ($y = 9$).

La relation $y = \frac{1}{x}$ définit une autre fonction. Ici, pour chaque valeur de x différente de zéro, la valeur correspondante de y est le nombre inverse de x; si $x = 2$, $y = \frac{1}{2}$; si $x = -\frac{1}{2}$, $y = -2$.

Quand on parle de la fonction sans préciser la nature de la fonction, on écrit : $y = f(x)$ (lire « y vaut f de x »). Cela signifie que y est une certaine fonction de x ($y = x^2$, ou $y = -\frac{1}{x}$, ou tout autre fonction). Ce mode de représentation des fonctions rappelle la désignation des nombres par des lettres. En effet, on peut parler des nombres : 2, $-\frac{1}{2}$ ou $\sqrt{2}$ et on peut parler du nombre a, en sous-entendant par a les nombres 2, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ ou tout autre nombre. De même que pour désigner les nombres on se sert de diverses lettres, pour désigner les fonctions, on peut écrire $y = f(x)$ ou $y = g(x)$, $y = h(x)$, etc.

Donc, si dans un même problème on doit envisager deux fonctions, on désigne l'une d'elles par $y = f(x)$ et l autre par $y = g(x)$, etc.

La fonction $y = f(x)$ peut être représentée graphiquement. Pour ce faire, on prend deux droites mutuellement perpendiculaires Ox et Oy, dits *axes des coordonnées* (fig. 1) et après avoir choisi une unité de mesure, on porte sur Ox les valeurs de x et sur les perpendiculaires à Ox (dans le

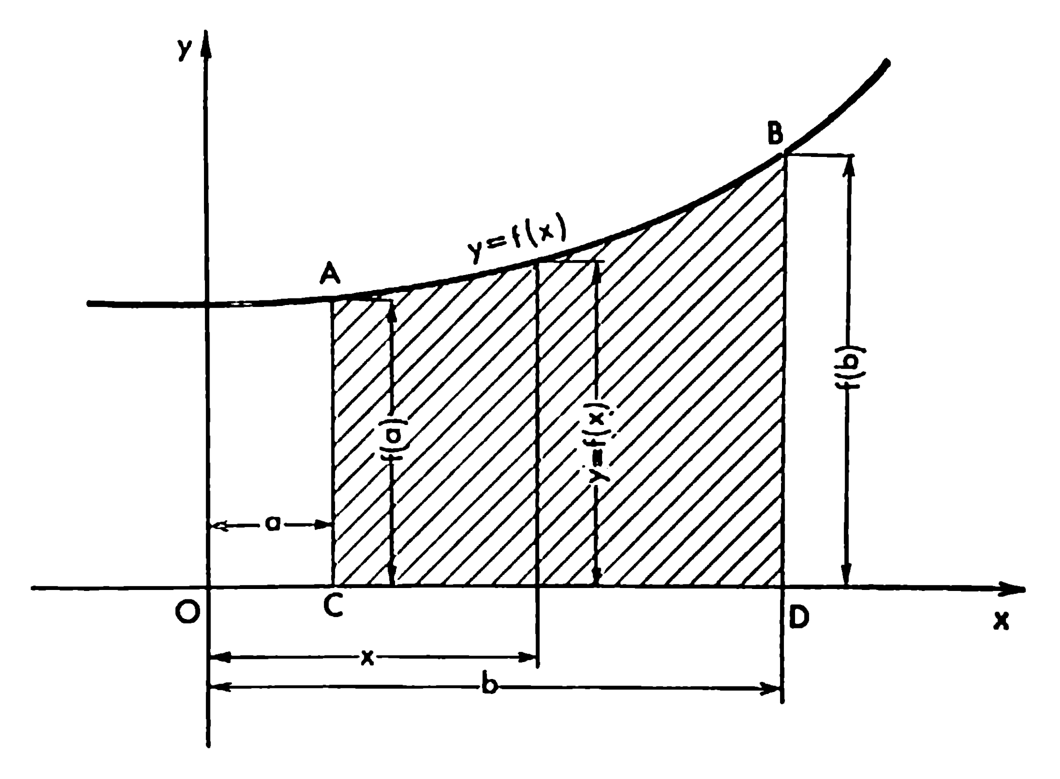


Fig. 1

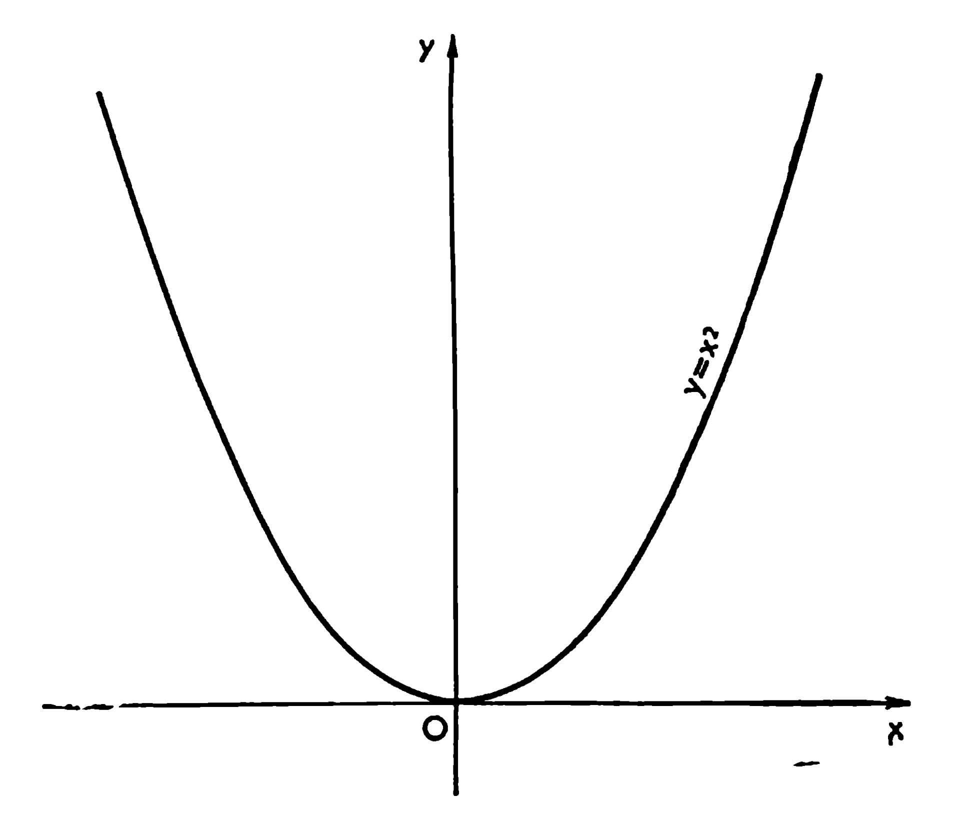


Fig. 2

plan xOy) les valeurs correspondantes de $y = f(x)$. On ne manque pas d'observer la règle des signes: les nombres positifs sont représentés par des segments portés à droite (sur l axe Ox) ou au-dessus (de l'axe Ox) ; les nombres négatifs sont portés à gauche ou au-dessous. Rappelons que les segments orientés portés à partir du point O sur Ox sont dits *abscisses* et les segments orientés portés à partir de Ox perpendiculairement à cette droite sont dits *ordonnées*.

En effectuant cette construction pour toutes les valeurs possibles de x, les extrémités des ordonnées représenteront sur le plan une courbe — graphique de la fonction $y = f(x)$ (dans le cas de la fonction $y = x^2$ le graphique est une parabole représentée fig. 2).

Prenons sur le graphique (fig. 1) deux points A et B quelconques et abaissons à partir de ces points les perpendiculaires AC et BD sur l'axe Ox. Nous obtenons la figure $ACDB$; une telle figure est appelée *trapèze curviligne*. Si, en particulier, l'arc AB est un segment de droite non parallèle à Ox, on obtient un trapèze ordinaire et, de plus, rectangulaire. Si AB est un segment de droite parallèle à Ox, on obtient un rectangle.

Donc, le trapèze rectangulaire et le rectangle sont des cas particuliers de trapèzes curvilignes.

Le graphique de la fonction représenté fig. 1 est situé au-dessus de l'axe Ox. Une telle disposition n'est possible qu'à la condition que les valeurs de la fonction soient des nombres positifs.

Si les valeurs de la fonction étaient négatives, le graphique serait situé au-dessous de l'axe Ox (fig. 3). Donnons par convention dans ce cas à l'aire du trapèze curviligne le signe moins et considérons-la négative.

Il se peut, enfin, que la fonction ait des signes différents suivant l'intervalle de variation de x choisi. Son graphique est alors situé en partie au-dessus de Ox et en partie au-dessous de Ox ; un tel cas est représenté à la fig. 4. Il convient de considérer ici comme négative l'aire du trapèze curviligne

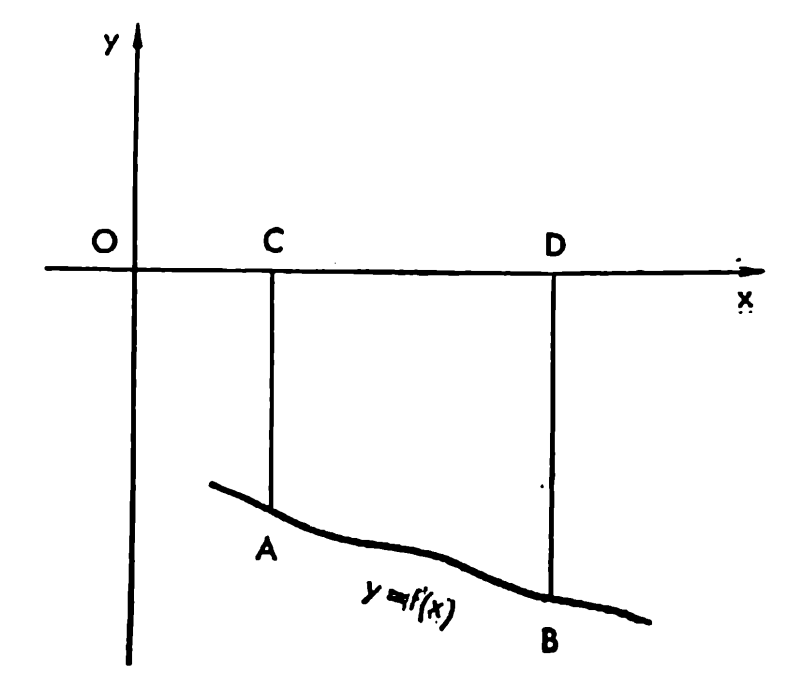


Fig. 3

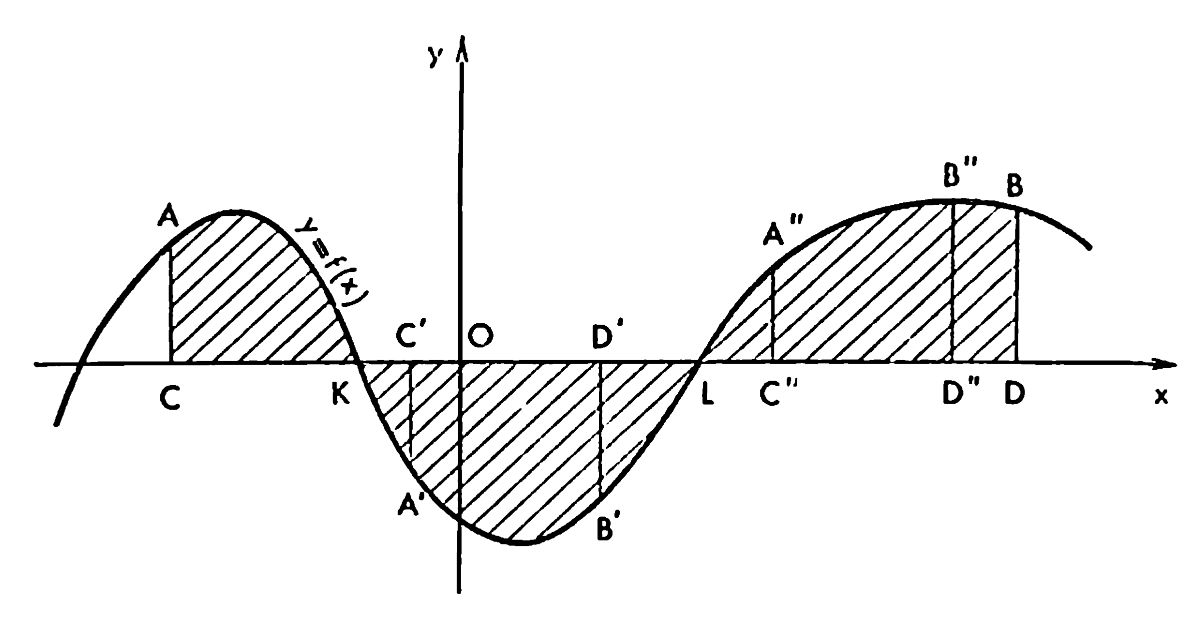


Fig 4

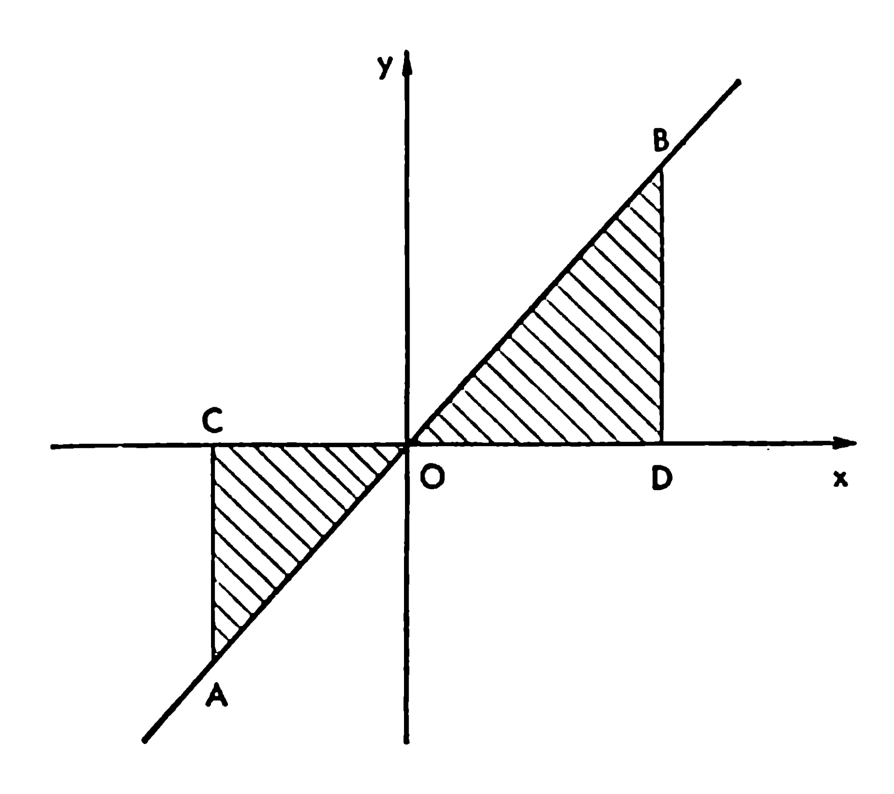


Fig. 5

$A'C'D'B'$ et comme positive l'aire de $A''C''D''B''$. Si dans ce cas on considère sur le graphique les points A et B comme indiqué sur la figure et qu'on abaisse à partir d'eux les perpendiculaires AC et BD sur l'axe Ox, on obtient entre ces perpendiculaires la figure hachurée de fig. 4. Cette figure est comme précédemment dénommée trapèze curviligne; elle est limitée par l'arc $AKA'B'LA''B''B$, par les deux ordonnées AC et BD et par le segment CD de l'axe des abscisses. Nous considérerons son aire comme la somme des aires des figures ACK, $KA'B'L$ et $LA''B''BD$, les aires de la première et de la troisième étant positives et l'aire de la deuxième étant négative.

Le lecteur comprendra facilement que dans ces conditions l aire du trapèze curviligne $ACDB$ tout entier peut être soit positive, soit négative, soit même nulle dans certains cas. Par exemple, le graphique de la fonction:

$$y = ax \quad (a > 0)$$

est une droite; ici, l'aire de la figure $ACDB$ (fig. 5) sera positive pour $OD > OC$, négative pour $OD < OC$ et, enfin, égale à zéro pour $OD = OC$.

2 Proposons-nous de déterminer l'aire S d'un trapèze curviligne. La nécessité d'évaluer des superficies de ce genre est un problème souvent rencontré en mathématiques, physique et mécanique, c'est pourquoi il a été créé une science spéciale — le calcul intégral — qui nous fournit des méthodes de résolution de ce problème. Commençons par esquisser la marche générale en divisant la solution du problème en deux parties. Dans la première, nous chercherons des valeurs approchées de l'aire avec une erreur d'approximation aussi réduite qu'on le voudra; dans la deuxième, nous passerons des valeurs approchées à la valeur exacte de l'aire.

En abordant la première partie de notre exposé, substituons au trapèze curviligne $ACDB$ une figure en paliers de l'aspect indiqué fig. 6 (cette figure est hachurée). L'aire de la figure en paliers est facile à évaluer; elle est égale à la somme des aires des rectangles. Nous considérerons cette somme comme la valeur approchée de l'aire S cherchée.

En remplaçant S par l'aire de la figure en paliers, nous commettons une certaine erreur α; cette erreur est la valeur sommée des aires des triangles curvilignes en noir sur notre figure. Pour évaluer l'erreur, nous choisissons le plus large des rectangles en le prolongeant de façon que sa hauteur devienne égale à la plus grande des valeurs de la fonction (égale à BD dans l'exemple de la fig. 6). Déplaçons ensuite tous les triangles curvilignes parallèlement à l'axe Ox de façon qu'ils viennent se loger dans ce rectangle; ils y forment une figure en scie (fig. 7). Comme cette figure s'inscrit entièrement dans le rectangle, l'erreur α, égale à la somme des aires des dents de scie [1]) doit être inférieure à l'aire

[1]) Sur les fig. 6 et 7 le graphique de la fonction a le profil d'une montée (ou d'une descente) de montagne. Si la forme du graphique

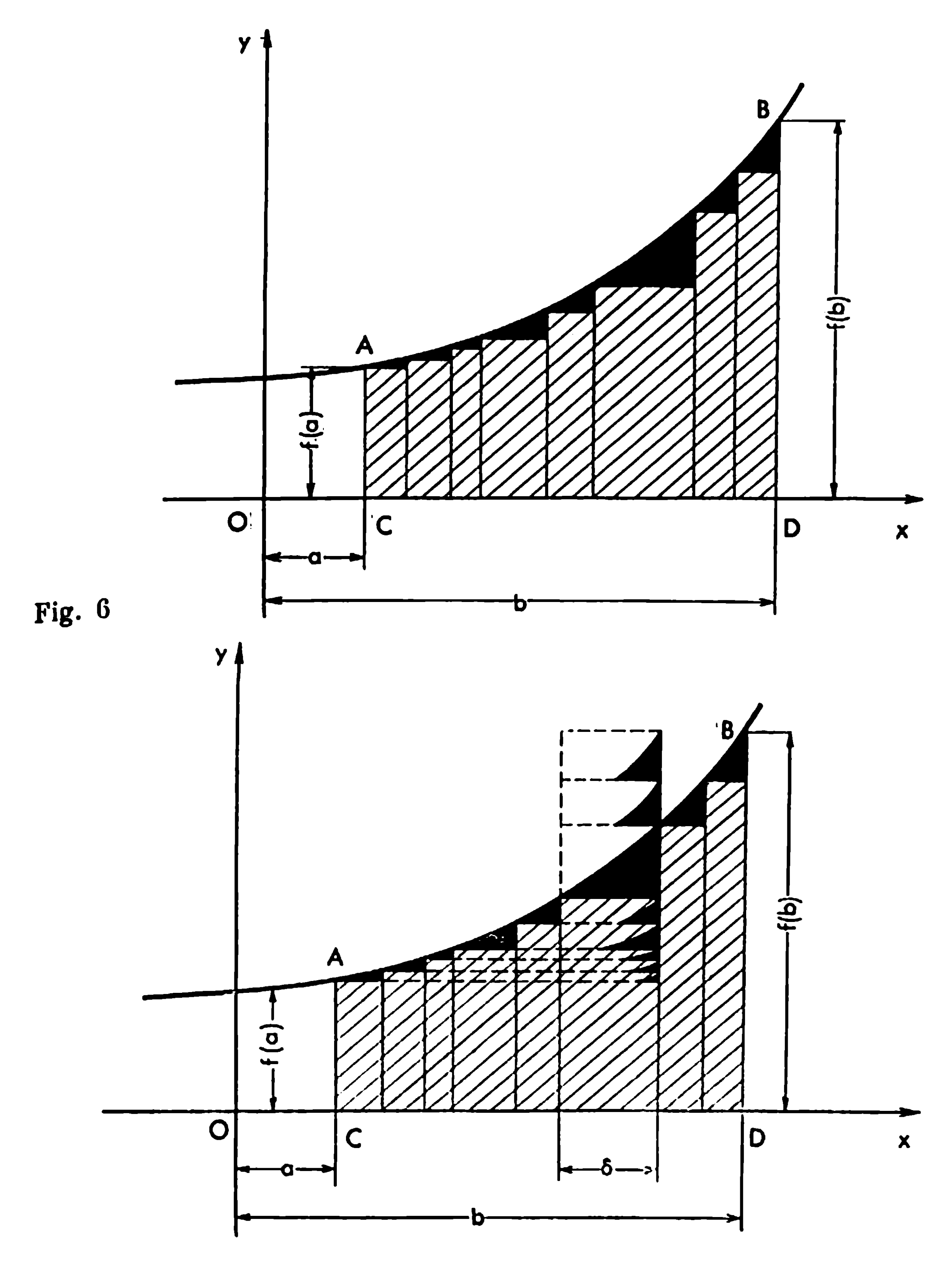


Fig. 6

Fig. 7

du rectangle. Soit δ sa base, nous obtenons $|\alpha| < \delta \cdot BD$. Il en découle que l'erreur α peut être réduite autant qu'on le veut en prenant sur la fig. 6 des rectangles si étroits que la base δ du plus large d'entre eux soit un nombre suffisamment petit. Par exemple, si $BD = 20$ et si nous voulons que l'aire de la figure en paliers diffère de S de moins de 0,001, il suffira de prendre $\delta \cdot BD = 20\delta$ inférieur à 0,001, c'est-à-dire $\delta < 0{,}00005$; alors

$$|\alpha| < \delta \cdot BD < 0{,}001.$$

Toutefois, si petit que soit δ que nous avons choisi, il y aura toujours une certaine erreur α, ne serait-ce que très petite, étant donné que l'aire du trapèze curviligne n'est pas égale à l'aire de la figure en paliers.

La deuxième et dernière partie de la solution du problème consiste dans le passage à la limite. On suppose que l'on considère, non pas une et pas deux, mais un nombre infini de figures en paliers, pareilles à celles de la fig. 6. On prend un nombre toujours plus grand de rectangles et on l'augmente indéfiniment, alors que la base δ du plus large des rectangles est prise de plus en plus petite et rapprochée indéfiniment de zéro. Quand on remplace l'aire du trapèze curviligne par l'aire de la figure en paliers, l'erreur α diminuera de plus en plus, se rapprochant elle aussi indéfiniment de zéro. L'aire S cherchée est la limite des aires des figures en paliers.

était plus compliquée, avec des alternances de montées et de descentes (voir, par exemple, fig. 4), les triangles curvilignes pourraient, après avoir été transportés dans le même rectangle, se chevaucher les uns les autres et alors la somme de leurs aires pourrait être supérieure à celle du rectangle. Pour appliquer notre raisonnement également à ce cas plus compliqué, il faut diviser la figure en plusieurs parties de façon que dans les limites d'une partie le graphique ait l'aspect soit d'une montée, soit d'une descente et effectuer le raisonnement séparément pour chaque partie.

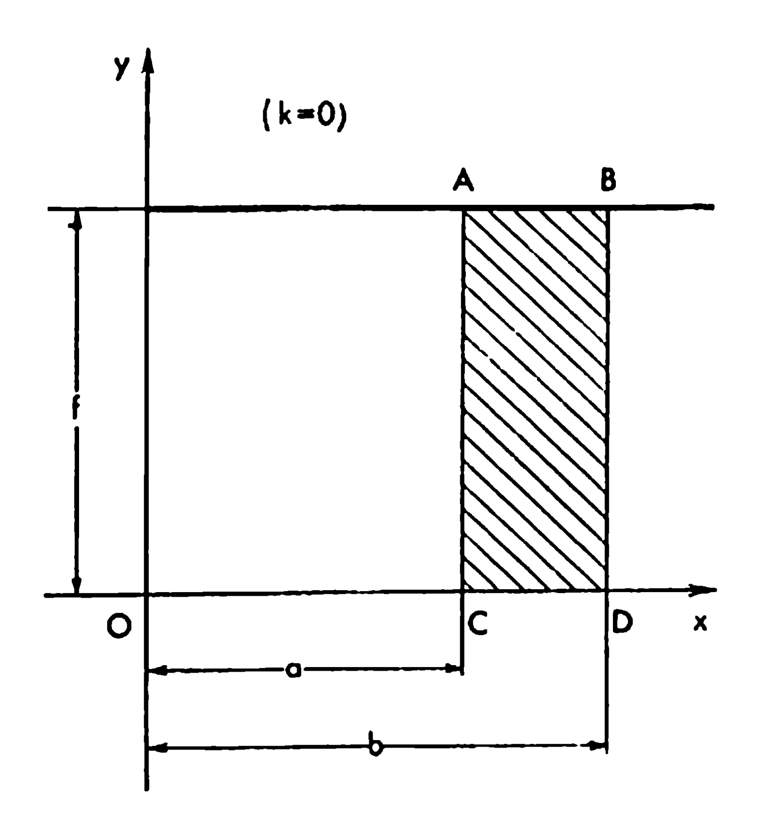


Fig. 8

3 Suivons la marche indiquée précédemment pour évaluer l'aire du trapèze curviligne dans le cas particulier important où la fonction $y = f(x)$ est une puissance dont l'exposant est un nombre entier non négatif $y = x^k$. Pour les exposants $k = 0$, $k = 1$, $k = 2$ nous obtenons les fonctions $y = x^0 = 1$, $y = x^1 = x$, $y = x^2$. Il est facile de construire leurs graphiques : c'est une droite parallèle à Ox et passant par l'ordonnée à 1 au-dessus de Ox (fig. 8) ; c'est la bissectrice de l'angle xOy (fig. 9) ou, enfin, c'est une parabole (fig. 10).

En prenant des exposants plus élevés, on obtient les fonctions $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ dont les graphiques sont représentés aux fig. 11, 12, 13.

Si k est un nombre impair, les graphiques sont symétriques par rapport au point O (fig. 9, 11, 13) ; si k est un nombre pair, ils sont symétriques par rapport à l'axe Oy (fig. 8, 10, 12).

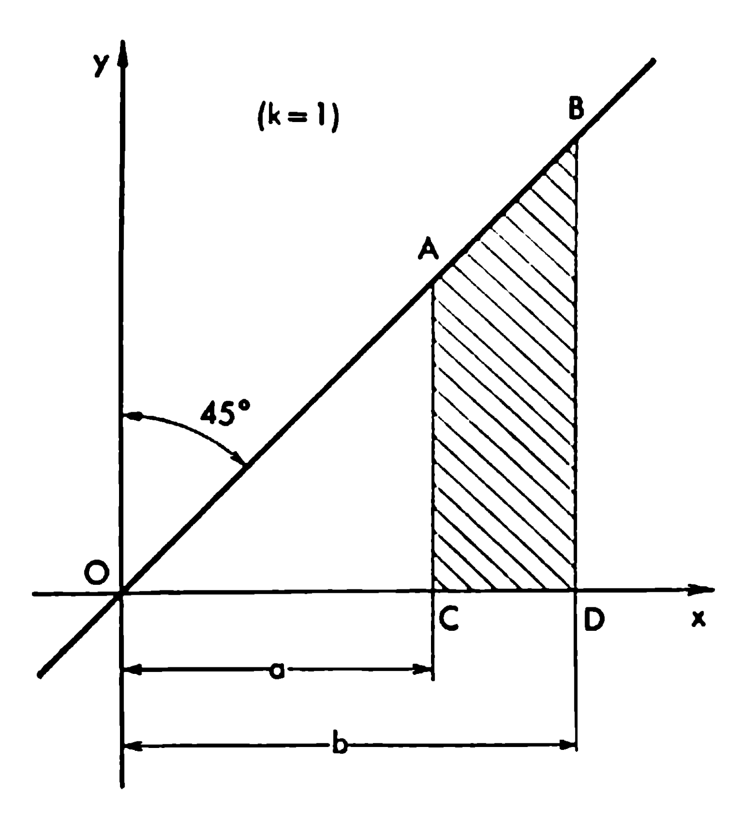


Fig. 9

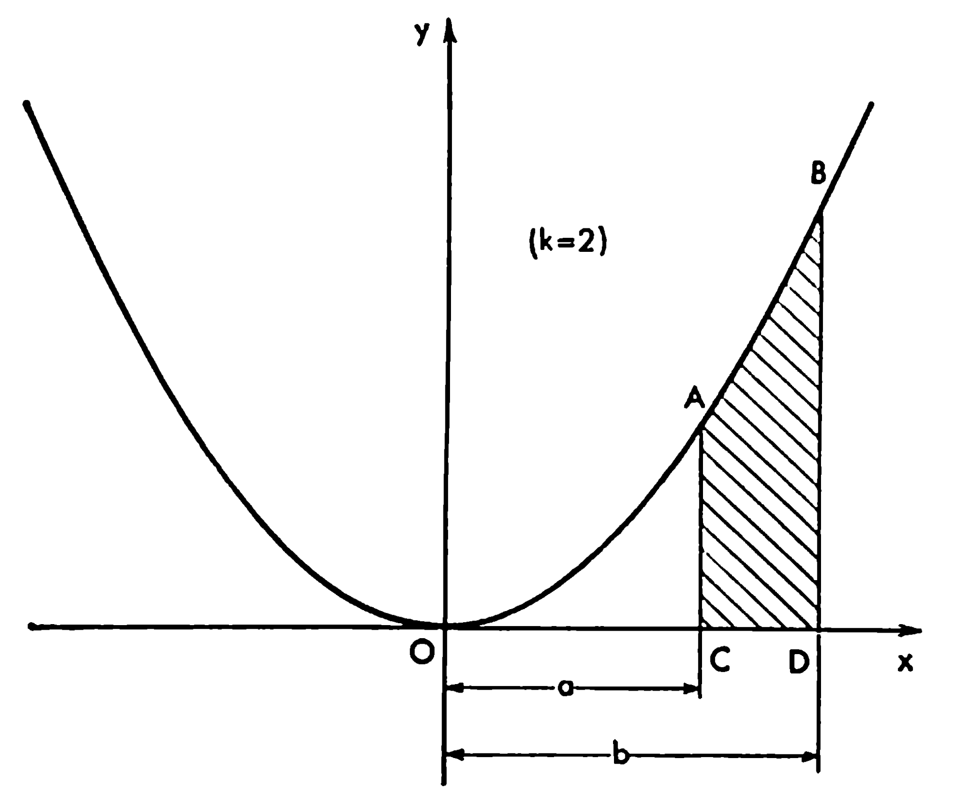


Fig. 10

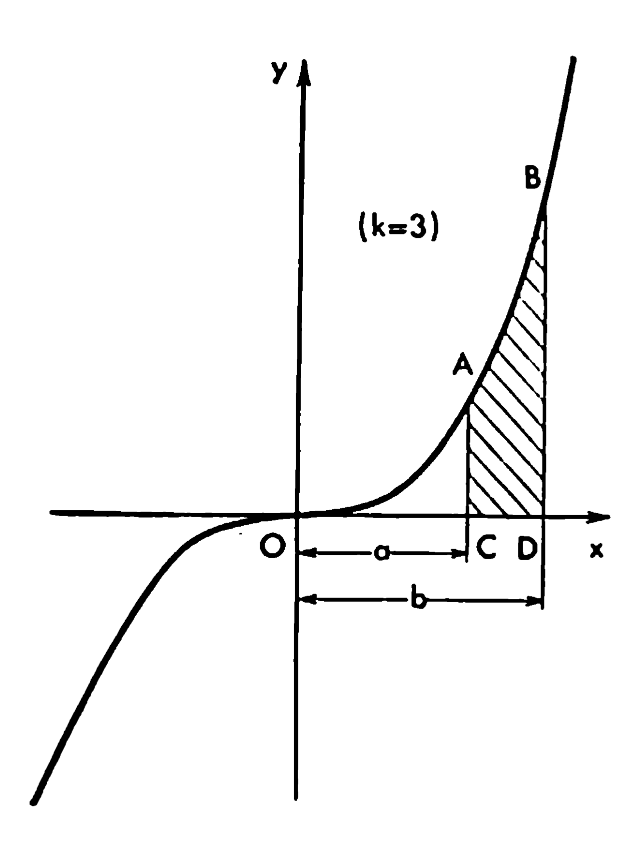


Fig. 11

Si $k \geqslant 1$, les graphiques passent par le point O. Plus k est grand, plus ils se rapprochent de l axe Ox au voisinage du point O; en même temps, plus leur montée (ou leur descente) est raide à mesure qu'ils s'éloignent du point O.

Sur chacune des fig. 8-13, les trapèzes curvilignes sont hachurés. Leur aire est facile à trouver, si $k = 0$ et $k = 1$. Si $k = 0$, l'aire $ACDB$ est égale à:

$$CD \cdot AC = (b - a) \cdot 1 = b - a;$$

si $k = 1$, l'aire $ACDB$ est égale à:

$$CD \cdot \frac{AC + BD}{2} = (b - a)\frac{a + b}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Démontrons que si $k = 2$, l'aire $ACDB$ est égale à $\frac{b^3 - a^3}{3}$; si $k = 3$, l'aire $ACDB$ est égale à $\frac{b^4 - a^4}{4}$ et ainsi de suite.

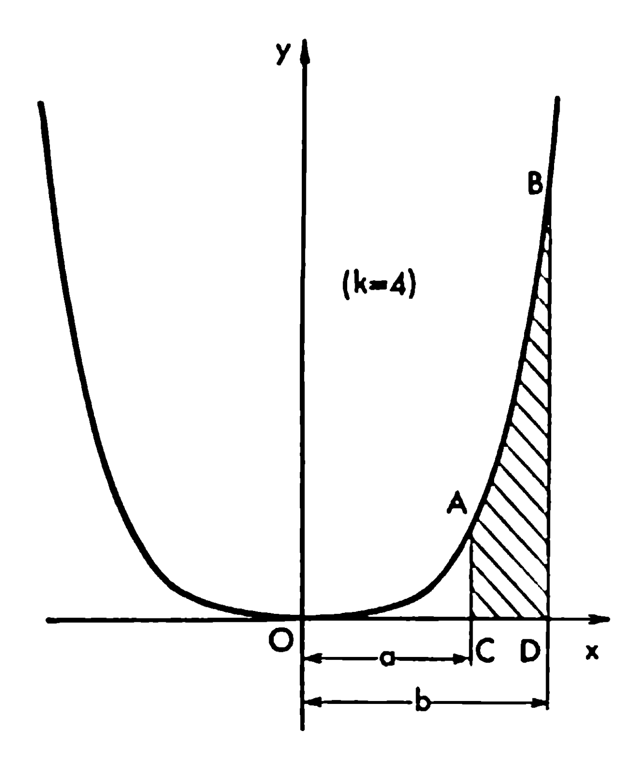


Fig. 12

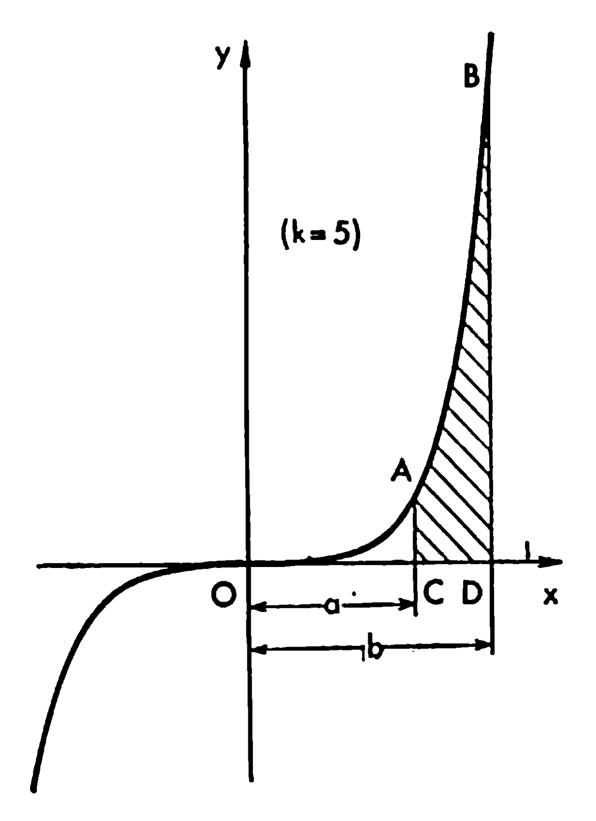
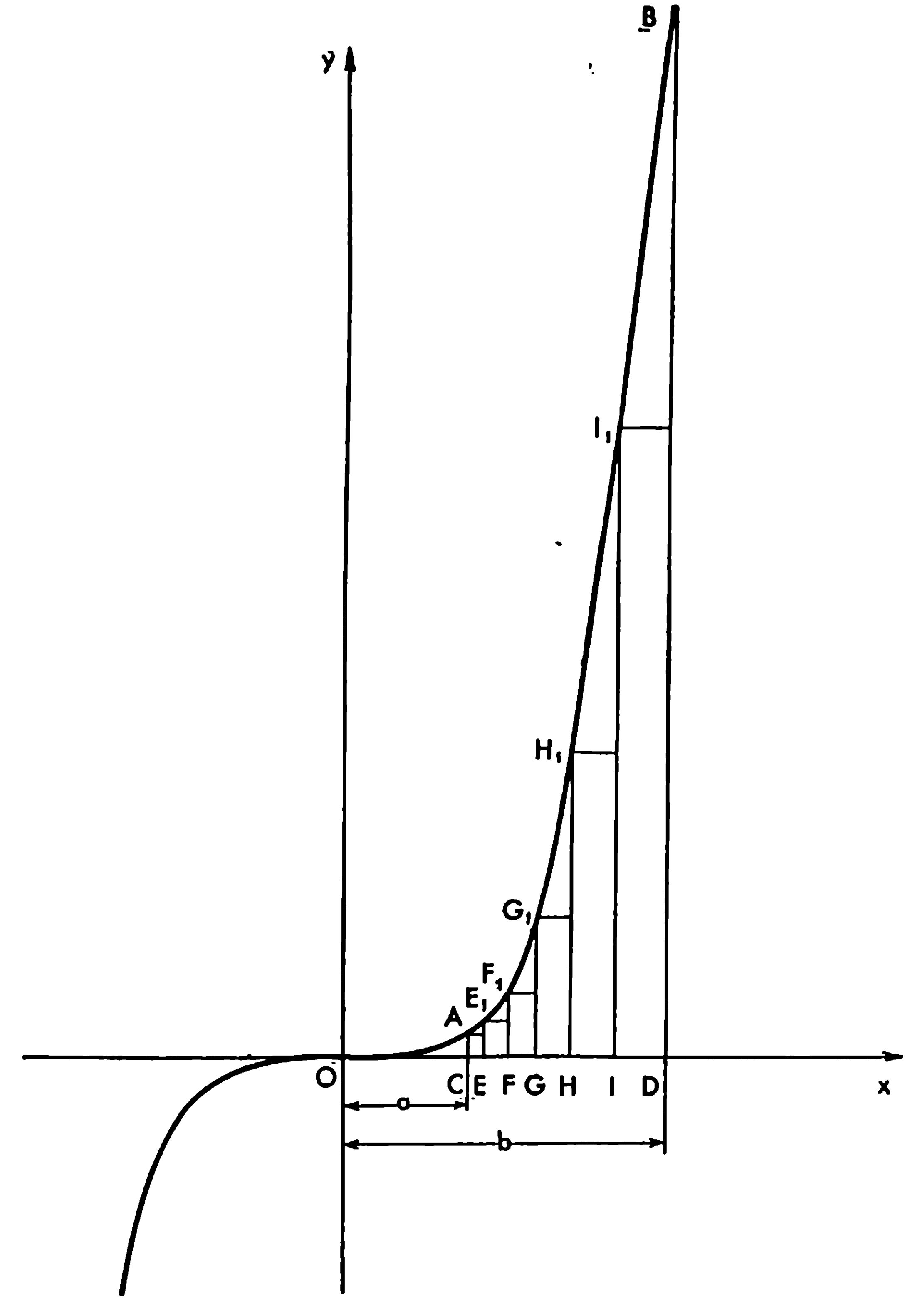


Fig. 13



ig. 14

Dans le cas général où k est un nombre entier quelconque non négatif, nous allons démontrer que l'aire du trapèze curviligne correspondant est égale à $\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}$. Il est évident que ce résultat général embrasse tous les cas particuliers précédemment indiqués.

Pour suivre plus facilement les calculs ultérieurs, prenons une valeur numérique déterminée de l'exposant k, par exemple $k = 5$. Supposons de plus que $0 < a < b$. Nous examinerons donc le graphique de la fonction $y = x^5$ et, suivant la marche indiquée au § 2, nous démontrerons que l'aire du trapèze curviligne $ACDB$ (fig. 14) est égale à $\frac{b^6-a^6}{6}$.

4 Nous devrons calculer la somme des aires d'un très grand nombre de rectangles, constituant les parties de la figure en paliers (fig. 14). Pour simplifier le travail, choisissons les rectangles de façon que leurs aires forment une progression géométrique. A cette fin, prenons les points E, F, G, H, . . . I sur Ox de sorte que les longueurs $OC = a$, OE, OF, OG, . . . OI, $OD = b$, constituent une progression géométrique; désignons par $n + 1$ le nombre des termes de cette progression et sa raison par q (étant donné que $b > a$, $q > 1$). Nous aurons alors les égalités:

$$OC = a,\ OE = aq,\ OF = aq^2,\ OG = aq^3,\ \ldots,$$
$$OI = aq^{n-1},\ OD = aq^n = b.$$

Sur la fig. 14 sont représentés 6 rectangles et par conséquent $n + 1 = 7$, mais nous supposerons dans la suite que n est un nombre aussi grand que l'on veut, par exemple que $n = 1000$, $10\,000$, $100\,000$ et ainsi de suite.

Les bases des rectangles forment une progression géométrique avec la même raison q:

$$CE = OE - OC = a(q-1), \quad EF = OF - OE = aq(q-1),$$
$$FG = OG - OF = aq^2(q-1),\ \ldots$$
$$\ldots,\ ID = OD - OI = aq^{n-1}(q-1)$$

(le nombre des termes de cette progression et des suivantes est égal à n et non à $n + 1$).

Les hauteurs des rectangles sont les ordonnées CA, EE_1, FF_1, GG_1, . . ., II_1 ; chacune d'elles est égale à la cinquième puissance de l'abscisse qui lui correspond (nous avons, en effet, convenu que $y = x^5$). Il s'ensuit,

$$CA = OC^5 = a^5, \quad EE_1 = OE^5 = a^5q^5, \quad FF_1 = OF^5 = a^5q^{10},$$
$$GG_1 = a^5q^{15}, \ldots, II_1 = OI^5 = a^5q^{5(n-1)}.$$

On voit donc que les hauteurs des rectangles forment aussi une progression géométrique de raison q^5 $(=q^k)$.

Les bases des rectangles constituant une progression de raison q et les hauteurs une progression de raison q^5 $(=q^k)$, les aires des rectangles doivent former une progression dont la raison est $qq^5 = q^6$ $(=q^{k+1})$:

$$CE \cdot CA = a\,(q-1)\,a^5 = a^6\,(q-1)\,;$$
$$EF \cdot EE_1 = aq\,(q-1)\,a^5q^5 = a^6q^6\,(q-1)\,;$$
$$FG \cdot FF_1 = aq^2\,(q-1)\,a^5q^{10} = a^6q^{12}\,(q-1)\,;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$ID \cdot II_1 = aq^{n-1}\,(q-1)\,a^5q^{5(n-1)} = a^6q^{6(n-1)}\,(q-1).$$

Il en suit que la somme des aires des rectangles, égale à à l'aire de la figure en paliers, est la somme d'une progression géométrique dont le premier terme est a^6 $(q - 1)$, le dernier $a^6q^{6(n-1)}$ $(q - 1)$ et la raison q^6:

$$\frac{a^6q^{6(n-1)}\,(q-1)\,q^6 - a^6\,(q-1)}{q^6-1} = [(aq^n)^6 - a^6]\,\frac{q-1}{q^6-1} =$$
$$= \frac{b^6 - a^6}{q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1}$$

(nous avons utilisé le fait que $b = aq^n$ et $\frac{q^6-1}{q-1} = q^5 + {} + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$).

5 Augmentons maintenant indéfiniment le nombre des rectangles n. Les bases des rectangles constituant une progression géométrique croissante ($q > 1$), la première de ces bases est donc la plus petite comparée à toutes les autres. Mais la somme des longueurs de toutes les n bases est égale à $b - a$; c'est pourquoi CE est plus petite que $\frac{b-a}{n}$, c'est-à-dire $aq - a < \frac{b-a}{n}$, d'où $q - 1 < \frac{b-a}{na}$.

Le deuxième membre de cette dernière inégalité tend vers zéro quand n croît indéfiniment; puisque le premier membre est positif, il doit de même tendre vers zéro, autrement dit q tend vers l'unité.

Il en découle ensuite que q^2, q^3, q^4 et q^5 tendent également vers 1, la somme $q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1$ tend vers $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$, et par suite l'aire totale de la figure en paliers, égale à

$$\frac{b^6 - a^6}{q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1},$$

tend vers la limite $\frac{b^6 - a^6}{6}$.

C'est à cette limite que doit être égale l'aire cherchée du trapèze curviligne:

$$S = \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

Ce résultat a été obtenu quand $k = 5$. Si nous avions fait les calculs sous la forme générale pour tout k naturel, nous aurions obtenu:

$$S = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Ainsi, nous avons démontré que l'aire du trapèze curviligne limité vers le haut par l'arc du graphique de la fonction $y = x^k$ et compris entre deux ordonnées d'abscisses a et b est égale à $\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$.

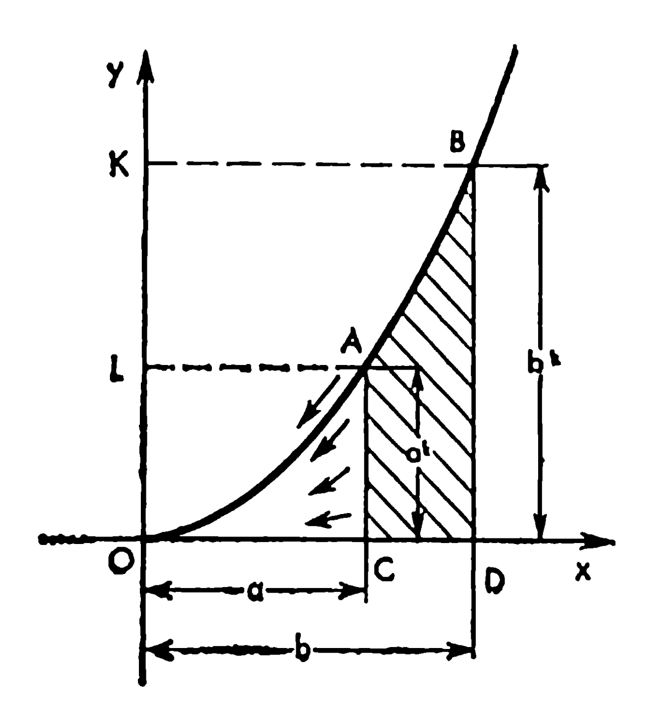


Fig. 15

6 Nous avons obtenu les résultats précédents en supposant que $0 < a < b$, c'est-à-dire que le trapèze curviligne est situé à droite de Oy. Si $a < b < 0$, la démonstration reste la même. Toutefois, en prenant comme précédemment pour raison de la progression q positif et supérieur à 1 unité, nous aurons maintenant considérer b comme premier terme de la progression et a comme dernier ($|a| > |b|$). En répétant les calculs, nous arrivons au même résultat:

$$S = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Si k est un nombre impair, $k + 1$ est pair et, par conséquent, b^{k+1} et a^{k+1} sont des nombres positifs et le premier est inférieur au second. Il en resulte que dans ce cas, S est un nombre négatif. Mais il n'y a rien d'étonnant à cela, car k étant impair le trapèze curviligne se situe au-dessous de Ox (voir les parties gauches des fig. 11, 13).

Reprenons le cas $0 < a < b$. Si b reste constant et on fait tendre a vers zéro, le trapèze curviligne s'allonge vers la gauche et pour a égal à zéro, il se transforme en *triangle curviligne ODB* (fig. 15) (nous supposons que $k \geqslant 1$). Il est évident que lorsque a tend vers zéro l'aire du trapèze curviligne tendra vers l'aire du triangle curviligne. En effet, la différence entre la deuxième et la première aire sera inférieure à l'aire $OCAL$ qui tend elle-même vers zéro. D'autre part, quand a tend vers zéro, l aire du trapèze curviligne (d'après la relation trouvée) tend vers $\frac{b^{k+1}}{k+1}$. Il en suit que l'aire du triangle ODB est égale à $\frac{b^{k+1}}{k+1}$, autrement dit qu'elle est $k+1$ fois plus petite que l'aire du rectangle $ODBK$ ou, ce qui revient au même, $k+1$ fois plus petite que le produit des « côtés du triangle rectangle » ODB (nous mettons des guillemets, car il ne s'agit pas d'un triangle ordinaire, mais d'un triangle curviligne). Pour $k = 1$, nous obtenons la fonction $y = x$, le graphique devient une droite (voir fig. 9); le triangle, un triangle rectangle ordinaire et son aire est $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ du produit des côtés de l'angle droit.

Des résultats analogues sont obtenus quand on envisage le cas $a < b < 0$ (le trapèze curviligne est situé à gauche de Oy). Alors, laissant a invariable, faisons tendre b vers zéro; dans ce cas, l'expression $\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$ tend alors vers la limite $-\frac{a^{k+1}}{k+1}$. Ce sera l'aire du triangle curviligne correspondant.

Le triangle curviligne peut être considéré comme un cas particulier de trapèze curviligne. De ce que nous avons établi, il suit que la relation

$$S = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

reste vraie pour le triangle curviligne. Il faut seulement

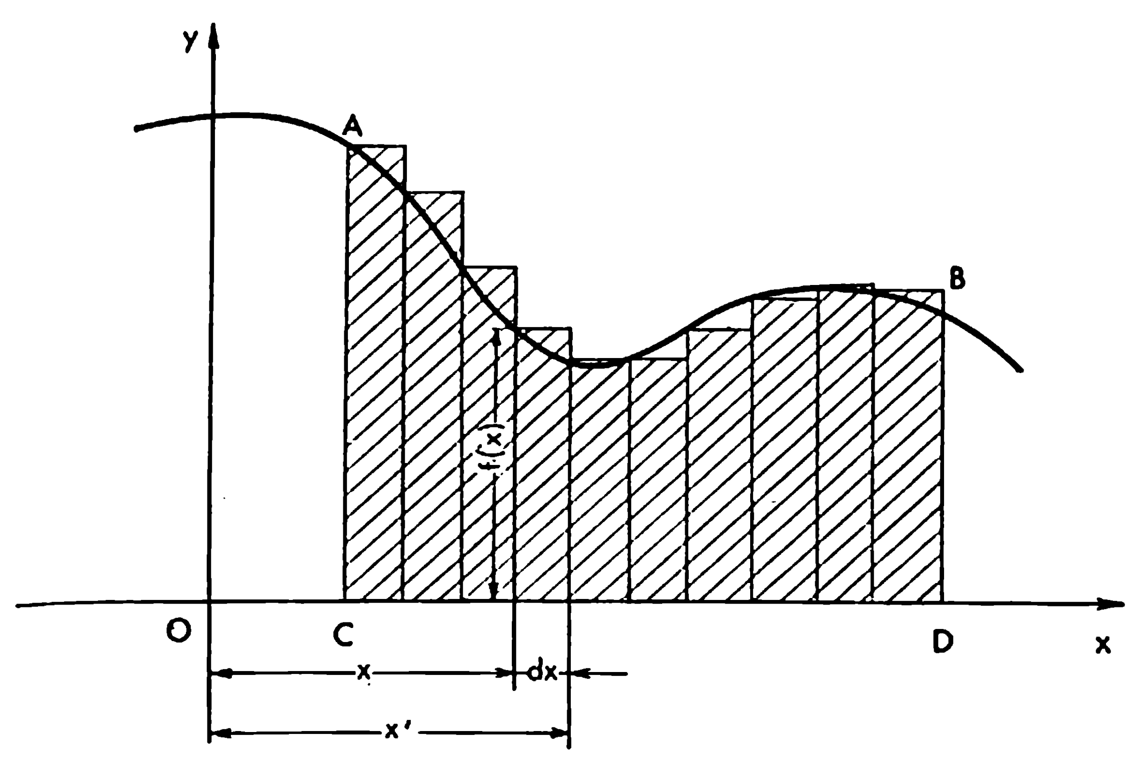


Fig. 16

y poser $a = 0$ (si le triangle est situé à droite de Oy) et $b = 0$ (si le triangle est à gauche de Oy).

7 Revenons au problème général de l'étude des trapèzes curvilignes. Soit $ACDB$ un trapèze curviligne limité par l'arc AB du graphique de la fonction $y = f(x)$, les deux perpendiculaires AC et BD abaissées des extrémités de l'arc sur Ox et le segment CD de la droite Ox compris entre les deux pieds des perpendiculaires (fig. 16). Si $OC = a$ et $OD = b$, $a < b$, l'aire $ACDB$ est représentée par:

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (*)$$

Chaque élément de cette représentation a un sens bien déterminé. On y a indiqué la fonction $f(x)$ dont le graphique

délimite d'un côté le trapèze curviligne, de même que les nombres a et b, fixant les bornes du trapèze curviligne à gauche et à droite. Dans cette représentation (*) est également rappelé le mode par lequel est trouvée l'aire $ACDB$; cette méthode, exposée aux §§ 2 et 3, consiste à sommer les aires des rectangles constituant la figure en paliers puis de passer à la limite. Le signe $\int$ est la lettre S allongée, initiale du mot *somme*. La lettre S n'est pas écrite de façon habituelle, car il s'agit de souligner que l'évaluation de l'aire du trapèze curviligne ne se ramène pas à une sommation, il nécessite encore un passage à la limite. A droite du signe $\int$, signe de l'*intégrale* se lisant somme, on trouve le produit $f(x)\,dx$. Il représente l'aire du rectangle de hauteur $f(x)$ et de base dx. La lettre d qui précède x est l'initiale de différence; dx désigne la différence de deux valeurs de x (voir fig. 16): $dx = x' - x$. Le nombre a est appelé limite inférieure, b — limite supérieure de l'intégrale (ici le mot « limite » est employé dans le sens de « borne »).

Ainsi, premièrement, l'exposition symbolisée par (*) de l'aire d'un trapèze curviligne donne toutes les informations sur sa forme et ses dimensions (ces renseignements sont fournis par les nombres a et b et la fonction $f(x)$); deuxièmement, elle rappelle la méthode par laquelle est trouvée l'aire du trapèze, qui consiste à évaluer les aires des rectangles de hauteurs égales à $f(x)$ et de bases dx, en faire la somme et de passer à la limite (le signe de l'intégrale rappelant les opérations de sommation et de passage à la limite). L'expression (*) s'énonce « somme de a à b de $f(x)\,dx$ ». Répétons que cette expression désigne l'aire du trapèze curviligne $ACDB$. En se servant de nouveau de symbole on peut écrire les résultats du § 5 de la façon suivante:

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

(k est un nombre entier non négatif). Cette dernière égalité s'énonce ainsi: « l'intégrale de a à b de x puissance k dx est égale à la différence entre b puissance $k+1$ et a puissance $k+1$, sur $k+1$ ».

8 Etablissons quelques propriétés élémentaires des intégrales. Il est évident que l'aire $ACDB$, ajoutée à l aire $BDD'B'$, donne l'aire $ACD'B'$ (fig. 17). Mais la première est égale à $\int_a^b f(x)\,dx$, la deuxième à $\int_b^c f(x)\,dx$ et la troisième à $\int_a^c f(x)\,dx$. Il en suit que $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$. Ici, $a < b < c$; si $a < c < b$ (fig. 18), nous obtenons, en écrivant que l'aire $ACD'B'$ sommée à l'aire $B'D'DB$ donne l'aire $ACDB$:

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En introduisant la notion d'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ au § 7 nous avons admis que $a < b$: la borne inférieure est plus petite que la borne supérieure. C'est justement pourquoi l'aire $BDD'B'$, où $OD = b$ et $OD' = c$, pour $b < c$ (fig. 17) s'écrivait $\int_b^c f(x)\,dx$, et pour $b > c$ (fig. 18), sous la forme $\int_c^b f(x)\,dx$ (la borne inférieure est chaque fois plus petite que la supérieure). Dans le premier cas, la différence des

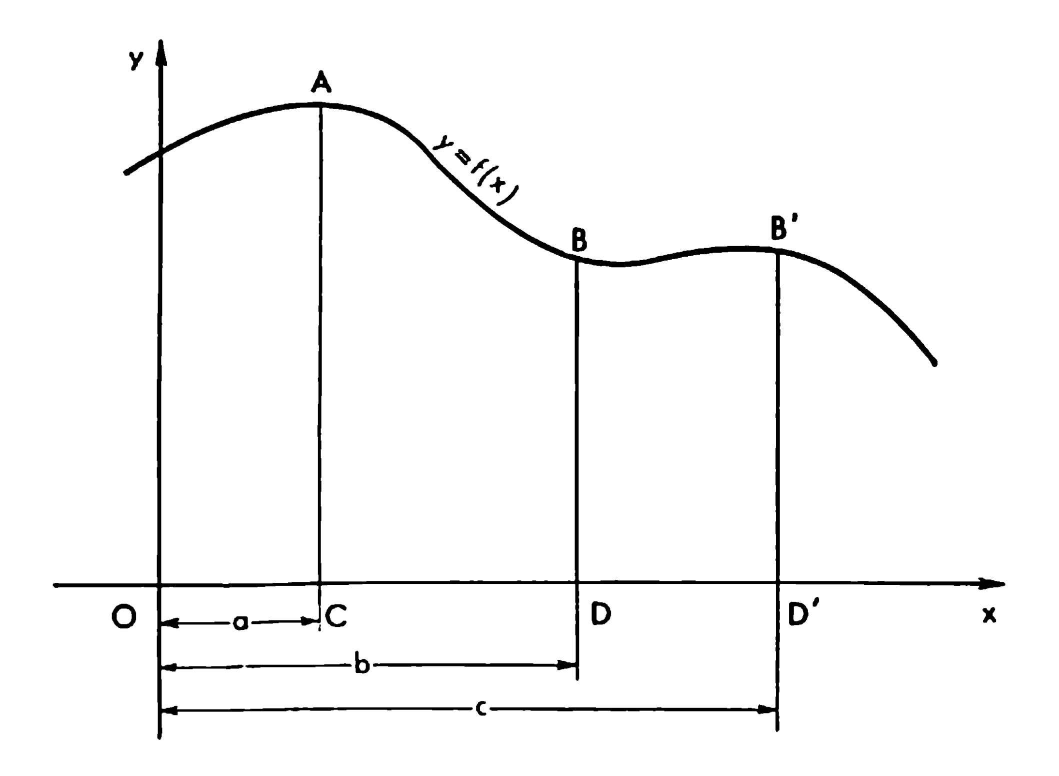


Fig. 17

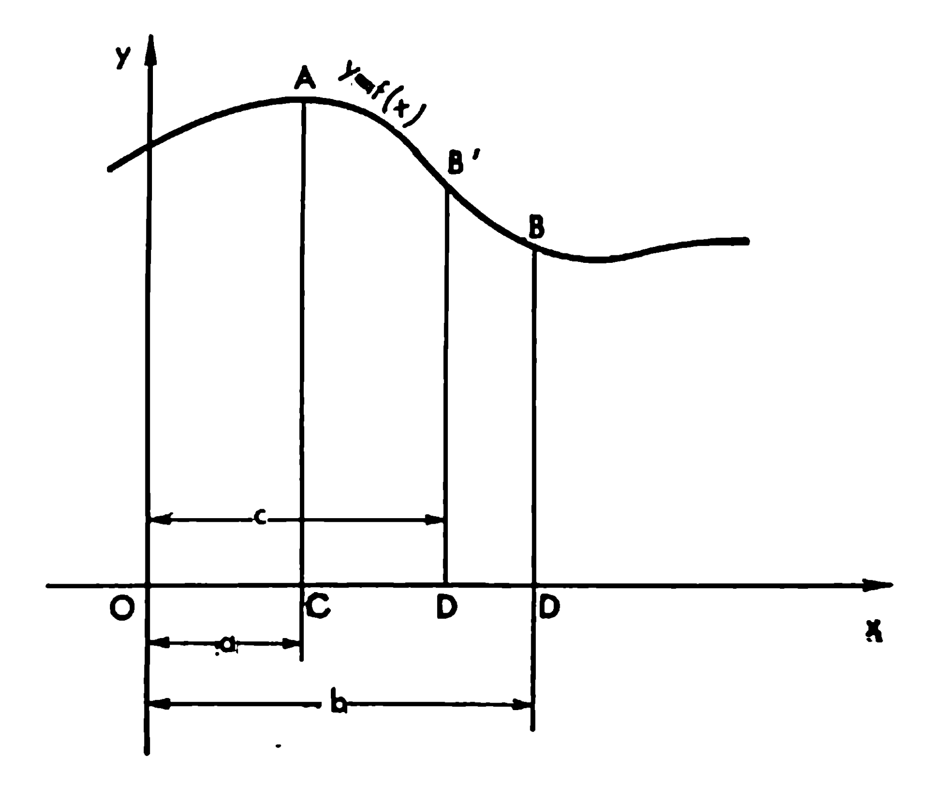


Fig. 18

intégrales $\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$ était égale à $\int_b^c f(x)\,dx$ et dans le second cas $-\int_c^b f(x)\,dx$ (nous nous sommes servis des égalités mentionnées plus haut entre les intégrales). Pour embrasser les deux cas dans une même formule, convenons d'écrire que pour $b > c$:

$$\int_b^c f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx.$$

Autrement dit, nous admettons maintenant une intégrale dont la borne inférieure est plus grande que la supérieure, et nous la considérons comme l'aire du trapèze curviligne dont nous avons changé le signe. Alors, au lieu de deux relations différentes:

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \quad (b < c)$$

ou

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = -\int_c^b f(x)\,dx \quad (b > c)$$

nous écrirons dans tous les cas:

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx \quad (b \neq c).$$

Pour $b = c$, le premier membre devient nul; c'est pourquoi il est naturel de considérer l'intégrale $\int_b^b f(x)\,dx$ comme nulle.

Donc, que nous ayons $b < c$ ou $b > c$ ou $b = c$, dans tous les cas on peut se servir de la relation

$$\int_a^c f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx.$$

Cette relation peut être représentée sous l'aspect suivant :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Nous proposons au lecteur de vérifier avec l'aide des résultats de ce paragraphe que l'expression

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

est juste pour *n'importe quels* a et b (et non seulement pour $0 \leqslant a < b$ ou $a < b \leqslant 0$).

9 Admettons que $f(x)$ ait l'aspect d'une somme ou d'une différence de deux fonctions : $f(x) = g(x) + h(x)$ ou $f(x) = g(x) - h(x)$ (par exemple, $f(x) = x^3 - x^5$). L'intégrale de $f(x)$ peut être alors remplacée par la somme ou la différence des intégrales des fonctions $g(x)$ et $h(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$$

$\left(\text{ou } \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx\right)$. Par exemple,

$$\int_a^b (x^3 - x^5)\,dx = \int_a^b x^3\,dx - \int_a^b x^5\,dx = \frac{b^4 - a^4}{4} - \frac{b^6 - a^6}{6}.$$

Nous allons démontrer cette propriété des intégrales en nous contentant du cas de la somme. Donc, soit $f(x) = g(x) + h(x)$; les graphiques des trois fonctions $g(x)$, $h(x)$ et $f(x)$ sont représentés fig. 19. Il s'agit de démontrer que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx,$$

c'est-à-dire que l'aire $ACDB$ est égale à la somme des aires $A_1C_1D_1B_1$ et $A_2C_2D_2B_2$. Divisons le segment de l'axe Ox entre les points $x = a$ et $x = b$ en plusieurs parties et construisons les figures en paliers correspondantes pour les trois trapèzes curvilignes représentés fig. 19. Il est évident que l'aire de chaque rectangle dans la partie inférieure du dessin est égale à la somme des aires des deux rectangles situés au-dessus de lui dans les parties moyenne et supérieure du dessin. L'aire de la figure en paliers inférieure est donc égale à la somme des aires des deux figures en paliers supérieures. Cette relation entre les aires des figures en paliers se maintiendra pour tout fractionnement du segment de l'axe Ox entre $x = a$ et $x = b$. Si l'on divise ce segment en un nombre de parties croissant indéfiniment dont les longueurs tendent vers zéro, l'aire inférieure tendra vers la limite $\int_a^b f(x)\,dx$ et les deux supérieures vers les limites

$$\int_a^b g(x)\,dx \text{ et } \int_a^b h(x)\,dx.$$

Comme la limite d'une somme est égale à la somme des limites:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b [g(x) + h(x)]\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx,$$

ce qu'il fallait démontrer.

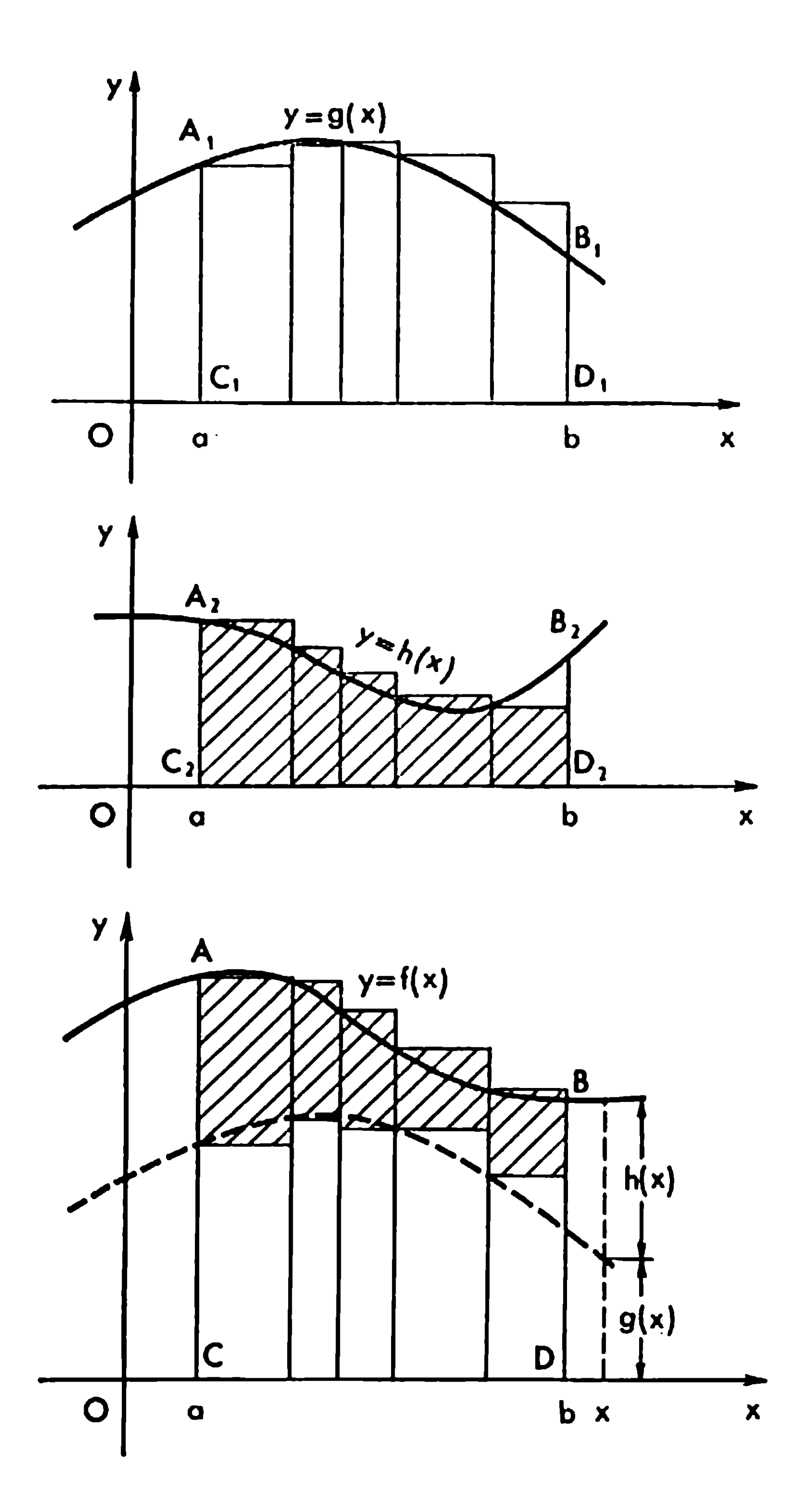


Fig. 19

De la même façon, on démontre que:

$$\int_a^b [g(x) - h(x)]\, dx = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b h(x)\, dx.$$

On voit aisément que cette propriété des intégrales est vraie également quand $f(x)$ est la somme d'un plus grand nombre de termes. Par exemple, si $f(x) = g(x) - h(x) + k(x)$, nous avons:

$$\int_a^b [g(x) - h(x) + k(x)]\, dx = \int_a^b [g(x) - h(x)]\, dx + \int_a^b k(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx - \int_a^b h(x)\, dx + \int_a^b k(x)\, dx.$$

10 Nous devons encore élucider les rapports existant entre les intégrales

$$\int_a^b f(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_a^b Cf(x)\, dx,$$

où C est un nombre (constant) quelconque; par exemple, quels rapports lient les intégrales:

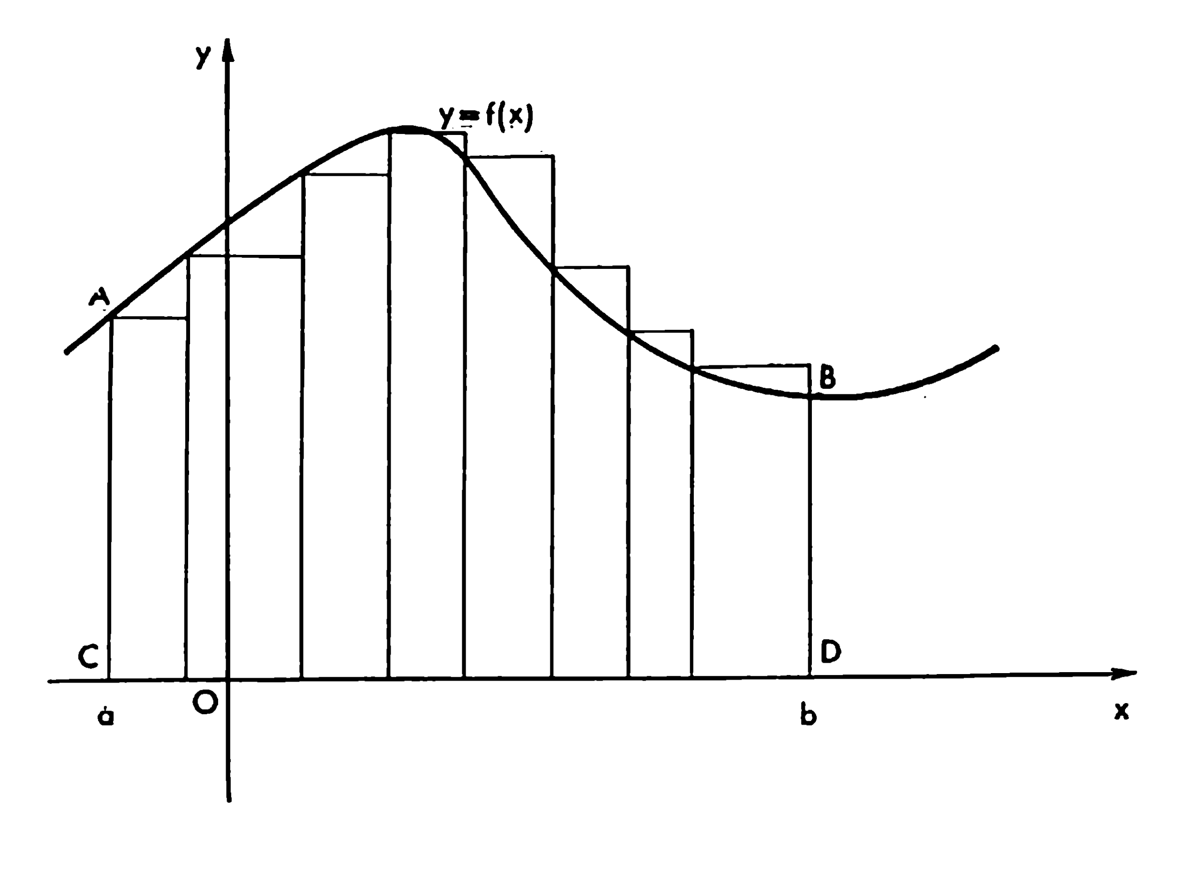
$$\int_a^b x^3\, dx \quad \text{et} \quad \int_a^b 2x^3\, dx.$$

Montrons que

$$\int_a^b Cf(x)\, dx = C \int_a^b f(x)\, dx;$$

par exemple,

$$\int_a^b 2x^3\, dx = 2 \int_a^b x^3\, dx = 2\frac{b^4 - a^4}{4} = \frac{b^4 - a^4}{2}.$$



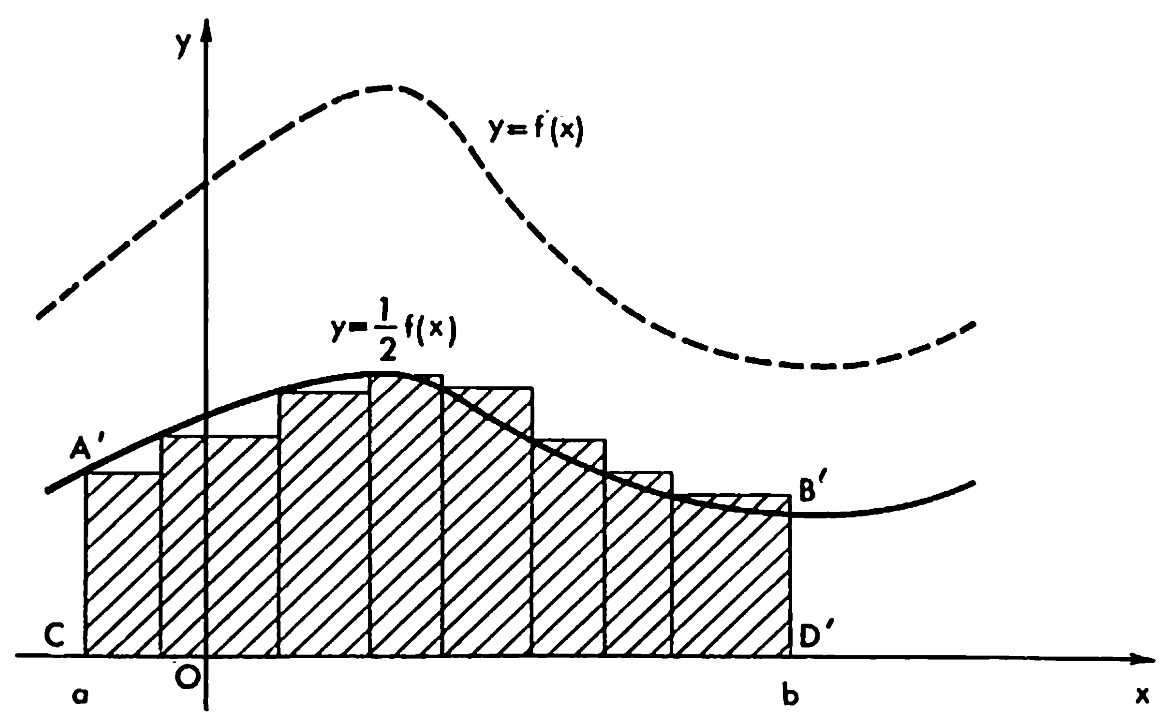


Fig. 20

Pour simplifier les raisonnements, admettons que C ait une certaine valeur numérique déterminée, par exemple posons $C=\frac{1}{2}$. Il s'agit, à présent, de comparer les intégrales :

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \frac{1}{2} f(x)\,dx.$$

On voit sur la fig. 20 des trapèzes curvilignes dont les aires sont représentées par ces intégrales. Partageons le segment de l'axe Ox entre les points $x = a$ et $x = b$ en un nombre de parties quelconque et construisons les figures en paliers correspondantes. On voit facilement que l'aire de chaque rectangle dans la partie inférieure de la figure est égale à la moitié de l'aire du rectangle situé au-dessus d'elle (de la partie supérieure). C'est pourquoi l'aire de la figure en paliers inférieure est la moitié de l'aire de la figure en paliers supérieure. En passant à la limite (comme au § 9), nous concluons que l'aire entière du trapèze curviligne inférieur est la moitié de celle du trapèze curviligne supérieur :

$$\int_a^b \frac{1}{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans ce raisonnement, le nombre C était positif; si nous prenons un nombre C négatif, par exemple $C=-\frac{1}{2}$, il faut remplacer la fig. 20 par la fig. 21.

En comparant à présent l'aire $ACDB$ et l'aire $A''C''D''B''$ nous constatons qu'il se produit ici non seulement un changement de valeur absolue de l'aire (sa réduction de moitié), mais aussi un changement de signe. Par conséquent,

$$\int_a^b \left(-\frac{1}{2}\right) f(x)\,dx = -\frac{1}{2} \int_a^b f(x)\,dx.$$

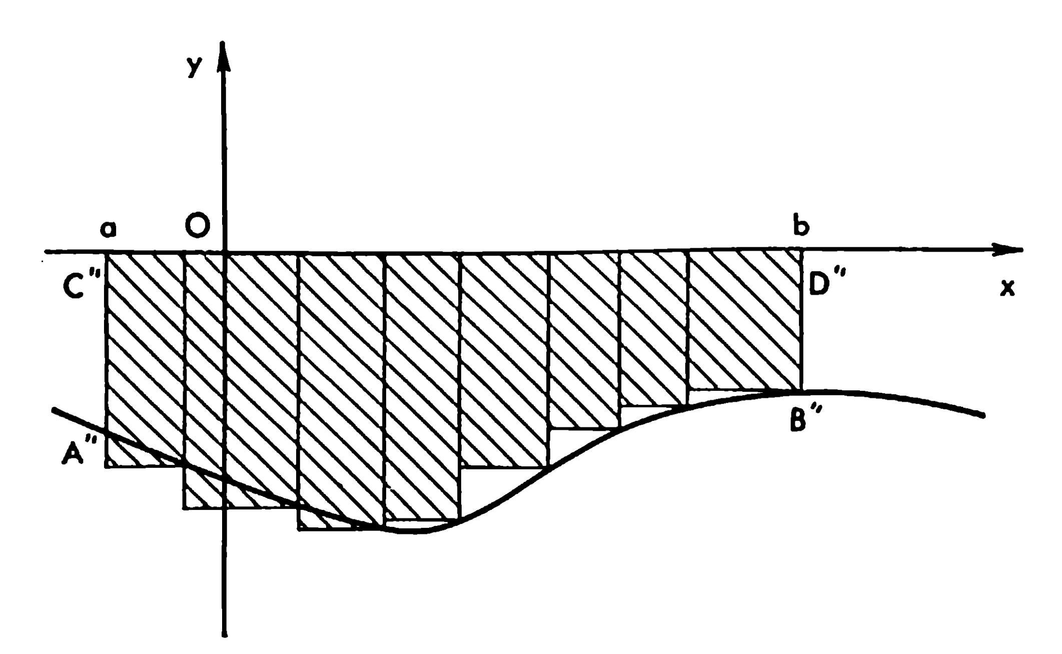


Fig. 21

Il est certain que nous avons choisi $C = \pm \frac{1}{2}$ pour plus de clarté seulement. D'une façon générale, quel que soit C l'égalité

$$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$

est vérifiée.

En qualité d'exemple d'utilisation des propriétés de l'intégrale demontré plus haut, calculons l'intégrale $\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$. Nous obtenons:

$$\int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx = \int_0^1 3x^2\,dx - \int_0^1 2x\,dx + \int_0^1 1\,dx =$$

$$= 3\int_0^1 x^2\,dx - 2\int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^0\,dx =$$

$$= 3\,\frac{1^3-0^3}{3} - 2\,\frac{1^2-0^2}{2} + \frac{1^1-0^1}{1} =$$

$$= 3\cdot\frac{1}{3} - 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 1.$$

11 Examinons la fonction

$$y = x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

Son graphique est une *hyperbole équilatère*; il est représenté fig. 22. Si nous appliquons à ce cas la formule de l'aire du trapèze curviligne

$$\int_a^b x^k\,dx = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1},$$

déduite plus haut pour $k \geqslant 0$, en remarquant que $k+1 = 0$, $b^{k+1} = a^{k+1} = 1$, nous obtenons dans la partie droite l'expression $\frac{0}{0}$ qui est privée de sens. Par conséquent, notre formule n'est pas valable pour $k = -1$.

L'invalidité de cette formule pour le calcul de l'intégrale $\int_a^b x^{-1}\,dx$ ne nous empêche pourtant pas d'étudier certaines propriétés de cette intégrale.

Démontrons que si l'on augmente ou si l'on diminue a et b d'un même nombre de fois, c'est-à-dire si on les multiplie par le même nombre $q > 0$, on obtient un nouveau trapèze curviligne *de même aire*. Bien entendu, nous nous apprêtons à démontrer cette propriété, supposition faite que la courbe dont les arcs délimitent d'un côté nos trapèzes

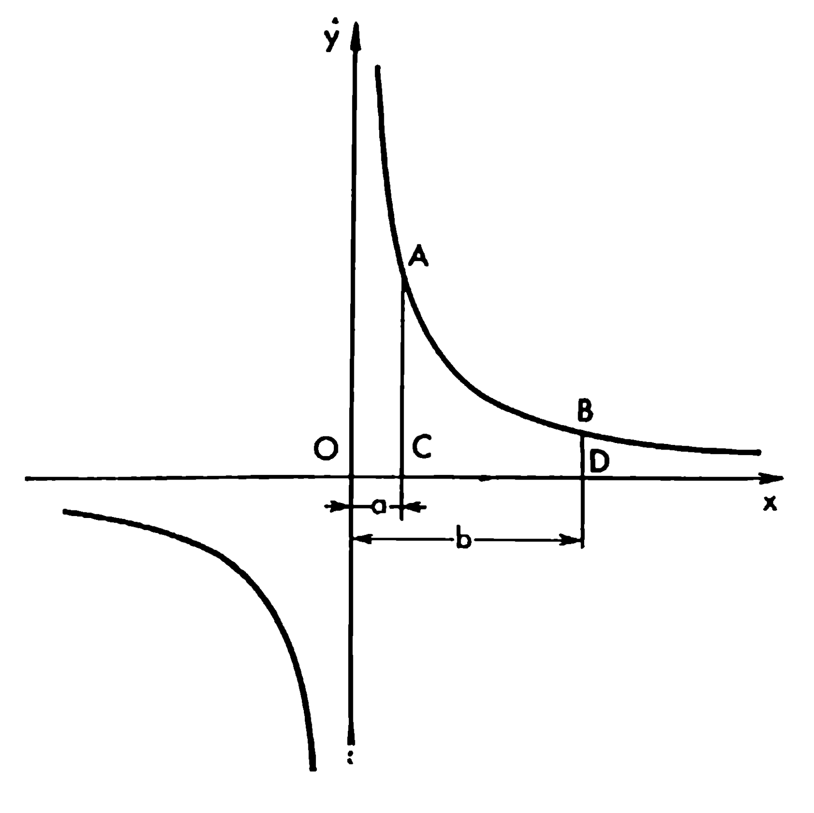


Fig. 22

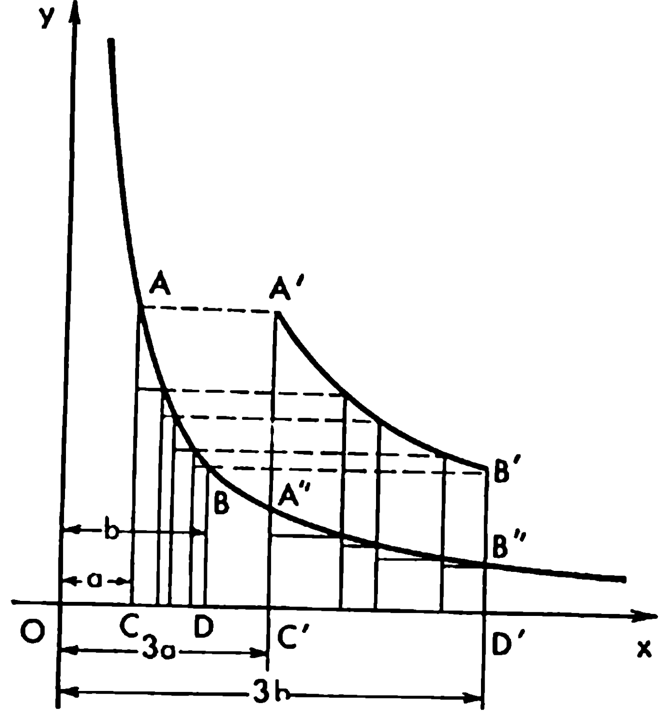


Fig. 23

curvilignes est une hyperbole équilatère et non une autre courbe. En d'autres termes:

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx,$$

quel que soit q ($q > 0$).

Pour suivre plus facilement la démonstration, donnons à q une valeur numérique bien déterminée, par exemple $q = 3$. La fig. 23 représente deux trapèzes curvilignes correspondants $ACDB$ et $A''C'D'B''$. Le premier est plus étroit, mais plus haut; le deuxième est plus large, mais plus aplati. Il s'agit de démontrer que dans le deuxième cas l'augmentation de la largeur est compensée par la diminution de la hauteur de façon que l'aire reste inchangée. A cette fin, partageons le premier trapèze en d'autres plus étroits et remplaçons chacun de ces derniers par un rectangle (fig. 23). Si on multiplie par 3 l'abscisse de chaque point de la figure en paliers $ACDB$ construite, en laissant les ordonnées invariables, on obtient la figure $A'C'D'B'$ dont l'aire est trois fois plus grande, étant donné que chaque rectangle est devenu trois fois plus large. Mais les extrémités des ordonnées ne se trouvent plus sur notre hyperbole. En effet, cette hyperbole est le graphique du rapport inverse $y = \frac{1}{x}$, et pour que les points ne la quittent pas, il faut diminuer l'ordonnée d'autant de fois qu'on a augmenté l'abscisse. Si l'on divise par 3 toutes les ordonnées de la figure $A'C'D'B'$ on obtient la figure $A''C'D'B''$. C'est un trapèze curviligne, limité vers le haut par l'arc de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ et vers les côtés par les ordonnées menées pour $x = 3a$ et $x = 3b$. Les rectangles ainsi obtenus ont des bases trois fois plus grandes que les rectangles initiaux et des hauteurs trois fois moindres. Leurs aires sont donc les mêmes que celles des rectangles initiaux. Il en suit que les aires des deux

figures en paliers sont égales, leurs limites le sont également, c'est-à-dire les aires des trapèzes curvilignes:

$$\int_{qa}^{qb} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx.$$

Nous avons démontré cette propriété en supposant que $a < b$. Mais elle est vraie pour $a = b$ et pour $a > b$. En effet, si $a = b$, $aq = bq$ et les deux intégrales se réduisent à zéro, si bien que l'égalité est toujours respectée. Si d'autre part $a > b$, on a également $aq > bq$ et dans ce cas l égalité

$$\int_{bq}^{aq} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx$$

sera également juste (maintenant $b < a$, c'est pourquoi b et a changent de rôle). Mais nous avons convenu au § 8 que, pour $a > b$, $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ signifie $-\int_{b}^{a} f(x)\,dx$. Par conséquent,

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = -\int_{bq}^{aq} x^{-1}\,dx,$$

$$\int_{a}^{b} x^{-1}\,dx = -\int_{b}^{a} x^{-1}\,dx$$

et comme les seconds membres de ces relations sont égaux, les premiers doivent l'être aussi:

$$\int_{aq}^{bq} x^{-1}\,dx = \int_{a}^{b} x^{-1}\,dx.$$

Donc, la relation démontrée reste vraie que l'on ait $a < b$, $a = b$ ou $a > b$.

12 Posons $a = 1$ et considérons $\int_1^b x^{-1}\,dx$. Si $b > 1$, cette intégrale représente l'aire du trapèze curviligne $ACDB$ (fig. 24). Si $b = 1$, elle devient nulle. Enfin, si $0 < b < 1$, la borne inférieure de l'intégrale est moins grande que la borne supérieure et nous obtenons:

$$\int_1^b x^{-1}\,dx = -\int_b^1 x^{-1}\,dx.$$

Ceci signifie que, dans ce cas, l'intégrale diffère seulement par le signe de l aire du trapèze curviligne $B'D'CA$ (fig. 25). Dans tous les cas, pour n'importe quel nombre b positif, l'intégrale $\int_1^b x^{-1}\,dx$ a une valeur parfaitement déterminée. Elle est positive quand $b > 1$, nulle quand $b = 1$ et négative quand $b < 1$.

Il est évident que l'intégrale $\int_1^b x^{-1}\,dx$ est fonction de b. Cette fonction joue dans les mathématiques un rôle important ; on l'appelle *logarithme naturel* ou népérien du nombre b et on la désigne par $\ln b$. Ici l et n sont les initiales de « logarithme » et de « naturel ». Donc:

$$\int_1^b x^{-1}\,dx = \ln b.$$

Signalons quelques propriétés du logarithme népérien. Avant tout, nous avons:

$$\ln b > 0 \text{ si } b > 1; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln b < 0 \text{ si } b < 1.$$

Déduisons ensuite la propriété essentielle du logarithme consistant en ce que le *logarithme d'un produit est égal à la*

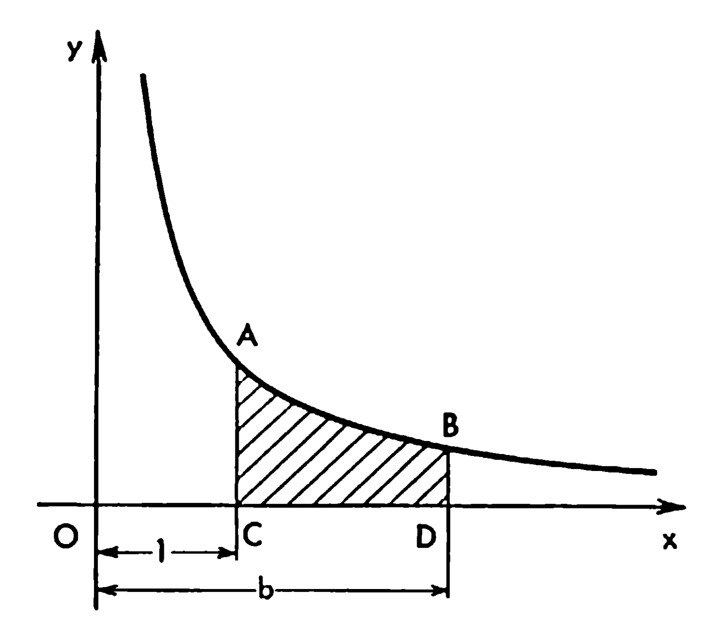


Fig. 24

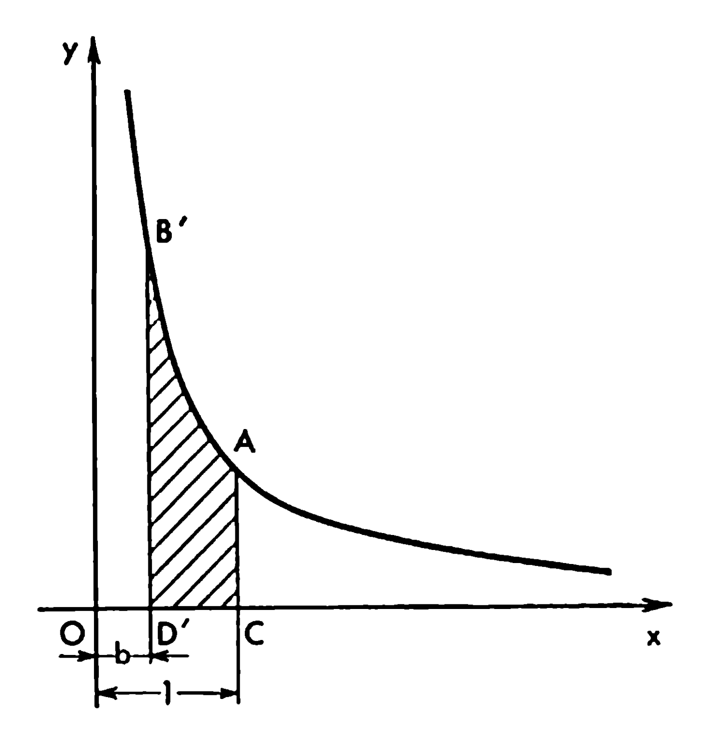


Fig. 25

somme des logarithmes de ses facteurs, par exemple, $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$.

Sous sa forme générale :

$$\ln (bc) = \ln b + \ln c, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\int_1^{bc} x^{-1}\,dx = \int_1^{b} x^{-1}\,dx + \int_1^{c} x^{-1}\,dx.$$

En effet, comme nous l'avons démontré plus haut :

$$\int_1^{c} x^{-1}\,dx = \int_q^{qc} x^{-1}\,dx$$

pour tout $q > 0$. Prenons $q = b$; nous obtenons alors :

$$\int_1^{c} x^{-1}\,dx = \int_b^{bc} x^{-1}\,dx.$$

C'est pourquoi :

$$\int_1^{b} x^{-1}\,dx + \int_1^{c} x^{-1}\,dx = \int_1^{b} x^{-1}\,dx + \int_b^{bc} x^{-1}\,dx;$$

mais cette dernière somme, d'après la propriété déduite au § 8, peut être remplacée par l'intégrale $\int_1^{bc} x^{-1}\,dx$. Donc,

$$\int_1^{b} x^{-1}\,dx + \int_1^{c} x^{-1}\,dx = \int_1^{bc} x^{-1}\,dx,$$

ce qu'il fallait démontrer.

On peut déduire de cette propriété certaines conséquences. Soit $b > 0$; alors, d'après ce qui vient d'être démontré

$$\ln 1 = \ln \left(b\frac{1}{b}\right) = \ln b + \ln \frac{1}{b},$$

mais comme $\ln 1 = 0$, $\ln b + \ln \frac{1}{b} = 0$, d'où

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b.$$

Par exemple, $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$. De plus, si $b > 0$, et $c > 0$, il s'ensuit que

$$\ln \frac{c}{b} = \ln \left(c \frac{1}{b}\right) = \ln c + \ln \frac{1}{b} = \ln c - \ln b\,;$$

autrement dit, le *logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins celui du diviseur.*

Nous avons formulé la propriété essentielle du logarithme pour le produit de deux facteurs, mais elle reste vraie pour le produit de n'importe quel nombre de facteurs. Ainsi, par exemple, dans le cas de trois facteurs, on obtient :

$$\begin{aligned}\ln (bcd) &= \ln [(bc)\, d] = \ln (bc) + \ln d = \\ &= (\ln b + \ln c) + \ln d = \\ &= \ln b + \ln c + \ln d.\end{aligned}$$

Il est évident que quel que soit le nombre de facteurs, le logarithme de leur produit sera toujours égal à la somme des logarithmes des facteurs.

Appliquons cette propriété au logarithme d'une puissance à exposant k entier et positif. Nous trouvons :

$$\ln b^k = \underbrace{\ln (bb \, \ldots \, b)}_{k \text{ fois}} = \underbrace{\ln b + \ln b + \ldots + \ln b}_{k \text{ fois}} = k \ln b.$$

Par exemple, $\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2$.

Soit $c = \sqrt[k]{b}$; alors $c^k = b$ et, par conséquent,

$$\ln b = \ln c^k = k \ln c = k \ln \sqrt[k]{b},$$

d'où

$$\ln \sqrt[k]{b} = \frac{1}{k} \ln b.$$

Par exemple,

$$\ln \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3} \ln 2.$$

Si $c = b^{\frac{p}{q}}$, où p et q sont des nombres entiers positifs, nous obtenons, en nous appuyant sur les propriétés démontrées:

$$\ln b^{\frac{p}{q}} = \ln \sqrt[q]{b^p} = \frac{1}{q} \ln b^p = \frac{1}{q} \cdot p \ln b = \frac{p}{q} \ln b.$$

Par conséquent, la propriété

$$\ln b^k = k \ln b$$

est vraie non seulement quand k est un nombre entier positif, mais aussi quand k est une fraction de la forme $\frac{p}{q}$.

On voit aisément que la même propriété est juste quand k est négatif (entier ou fractionnaire). En effet, si $k < 0$, $-k > 0$ et nous avons:

$$\ln b^k = \ln \frac{1}{b^{-k}} = -\ln b^{-k} = -(-k \ln b) = k \ln b.$$

Enfin, la même propriété est vraie pour $k = 0$:

$$\ln b^0 = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln b.$$

Donc, pour tout k rationnel (positif, égal à zéro ou négatif, entier ou fractionnaire) on peut affirmer que

$$\ln b^k = k \ln b.$$

On pourrait démontrer que cette relation est également juste pour k irrationnel; par exemple:

$$\ln b^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \ln b.$$

Nous adopterons cette dernière affirmation sans démonstration et nous nous servirons de cette propriété: *le logarithme naturel de la puissance d'un nombre est égal au produit de*

l'exposant de la puissance par le logarithme naturel de ce nombre — pour toutes les valeurs possibles de l'exposant k, aussi bien rationnelles qu'irrationnelles.

13 Occupons-nous maintenant du calcul des logarithmes. Supposons qu'on ait à calculer ln 2, c'est-à-dire à trouver l'aire du trapèze curviligne $ACDB$ représenté fig. 26, *a*. Partageons le segment CD en 10 parties égales et menons les ordonnées correspondantes: K_1L_1, K_2L_2, . . ., . . ., K_9L_9. Pour trouver la meilleure approximation possible de ln 2, remplaçons chacun des trapèzes curvilignes étroits que nous avons obtenus non par un rectangle, comme précédemment, mais par un trapèze rectiligne ordinaire. A cette fin, réunissons les points A et L_1, L_1 et L_2, etc. . . ., L_9 et B par des segments rectilignes. Sur la fig. 26, *a* il serait difficile de distinguer les trapèzes ordinaires des trapèzes curvilignes; pour mieux discerner la différence, donnons, la fig. 26, *b*, leur image grossie. L'aire de chaque trapèze est égale au produit de la demi-somme des bases par la hauteur; mais dans notre cas, toutes les hauteurs sont égales:

$$CK_1 = K_1K_2 = \ldots = K_9D = 0{,}1.$$

C'est pourquoi les aires des trapèzes seront:

$$\frac{AC+K_1L_1}{2}\cdot 0{,}1\,;\quad \frac{K_1L_1+K_2L_2}{2}\cdot 0{,}1\,;\ \ldots\,;$$

$$\frac{K_9L_9+BD}{2}\cdot 0{,}1\,;$$

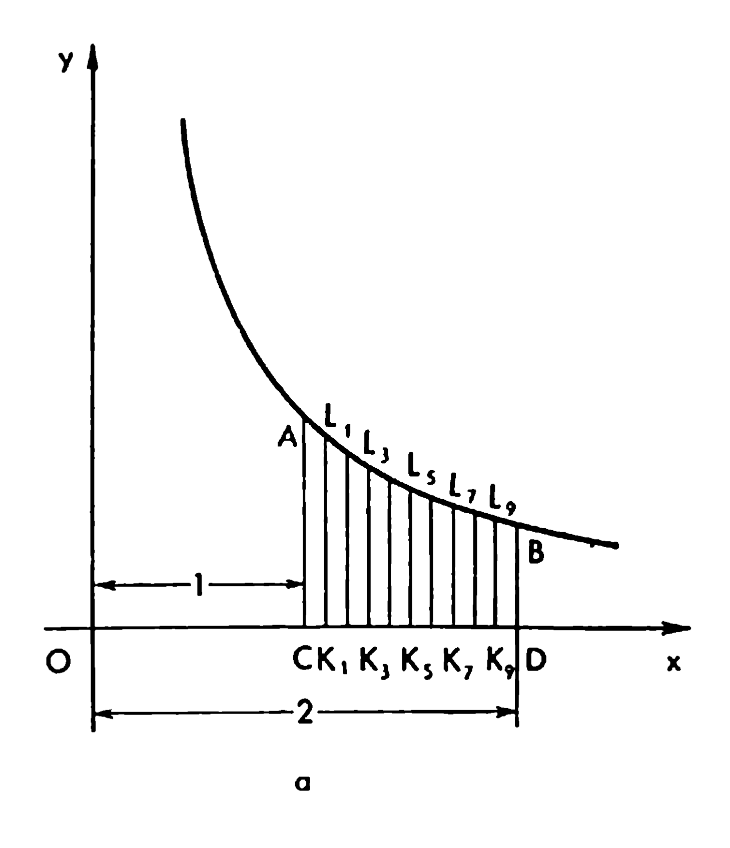
la somme de ces aires est égale à :

$$0{,}1\,\frac{(AC+K_1L_1)+(K_1L_1+K_2L_2)+\ldots+(K_9L_9+BD)}{2},$$

ou:

$$0{,}1\,(0{,}5AC+K_1L_1+K_2L_2+\ldots+K_9L_9+0{,}5BD).$$

Il reste à signaler que toutes les bases des trapèzes sont les



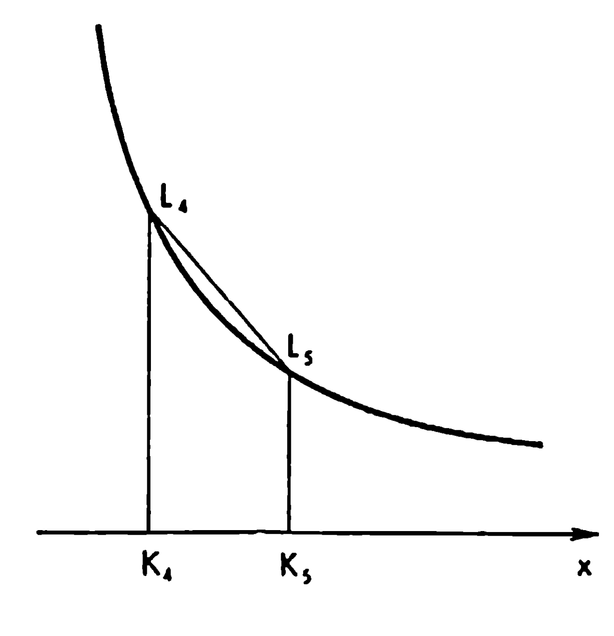


Fig. 26

ordonnées du graphique de la fonction $y = \frac{1}{x}$, correspondant aux abscisses suivantes:

1 ; 1,1 ; 1,2 ; 1,3 ; 1,4 ; 1,5 ; 1,6 ; 1,7 ; 1,8 ; 1,9 ; 2.

Il en suit donc:

$$AC = \frac{1}{1} = 1{,}000, \quad K_1L_1 = \frac{1}{1{,}1} = 0{,}909 ; \quad K_2L_2 = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}833 ;$$

$$K_3L_3 \doteq \frac{1}{1{,}3} = 0{,}769 ; \quad K_4L_4 = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}714 ; \quad K_5L_5 = \frac{1}{1{,}5} =$$

$$= 0.667 ; \quad K_6L_6 = \frac{1}{1{,}6} = 0{,}625 ; \quad K_7L_7 = \frac{1}{1{,}7} = 0{,}588 ;$$

$$K_8L_8 = \frac{1}{1{,}8} = 0{,}556 ; \quad K_9L_9 = \frac{1}{1{,}9} = 0{,}526 ; \quad BD = \frac{1}{2} = 0{,}500.$$

Par conséquent la somme des aires des trapèzes est égale à

$$0{,}1\,(0{,}500 + 0{,}909 + 0{,}833 + 0{,}769 + 0{,}714 + 0{,}667 + 0{,}625 + 0{,}588 + 0{,}556 + 0{,}526 + 0{,}250) = 0{,}6937.$$

Or à regarder attentivement la fig. 26, il est clair que la somme des aires de ces trapèzes a une valeur un peu plus grande que l'aire du trapèze curviligne. Ceci signifie que nous avons trouvé la valeur approchée de ln 2 par excès, c'est-à-dire que ln 2 est un peu inférieur à 0,6937.

Nous prendrons connaissance plus bas d'un autre procédé de calcul des logarithmes qui permettra, en particulier, d'obtenir ln 2 avec une plus grande précision.

14 Si l'on compte les abscisses non pas à partir du point O, mais à partir du point C (fig. 27) et qu'on désigne les nouvelles abscisses par la lettre t, la relation entre la nouvelle et l'ancienne abscisses d'un même point sera:

$$x = 1 + t.$$

Cette relation sera vraie pour n'importe quel point, si l'on admet que $t > 0$ quand $x > 1$ et que $t \leqslant 0$ quand

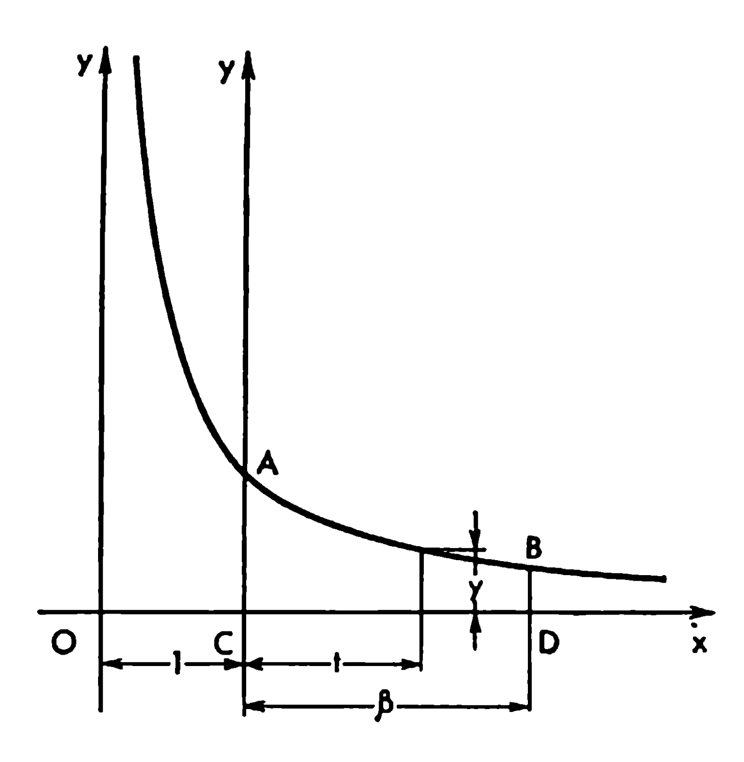


Fig. 27

$x \leqslant 1$. Quand on remplace x par $1 + t$, la fonction $y = \frac{1}{x}$ prend la forme : $y = \frac{1}{1+t}$, mais son graphique ne change pas. Le nouveau introduit par t, ce n'est qu'une nouvelle origine des coordonnées (C au lieu de O) et, par conséquent, un nouvel axe Cy (parallèle au précédent) ; la courbe, elle, ne change pas. Evidemment, l'aire $ACDB$ ne varie pas non plus. Or, quand nous considérions x comme abscisse, cette aire était représentée par l'intégrale

$$\int_{1}^{1+\beta} x^{-1}\,dx = \ln(1+\beta) \quad (\beta = CD).$$

Maintenant avec t pour abscisse, la même aire est représentée par l'intégrale $\int_{0}^{\beta} (1 + t)^{-1}\,dt$. Comparons ces deux

intégrales, nous avons:

$$\ln(1+\beta)=\int_0^\beta (1+t)^{-1}\,dt.$$

Remarquons maintenant l'identité suivante:

$$1-t+t^2-t^3+\ldots-t^{2n-1}=\frac{1-t^{2n}}{1+t}.$$

On l'obtient immédiatement si l'on remarque que le premier membre comprend une progression géométrique avec 1 pour premier terme, $-t$ pour raison et $-t^{2n-1}$ pour dernier terme. Il découle de cette identité que:

$$\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-t^3+\ldots-t^{2n-1}+\frac{t^{2n}}{1+t}.$$

C'est pourquoi:

$$\ln(1+\beta)=\int_0^\beta \left[1-t+t^2-t^3+\ldots-t^{2n-1}+\frac{t^{2n}}{1+t}\right]dt.$$

Maintenant, sous le signe de l'intégrale, au lieu de $(1+t)^{-1}$ se trouve une expression plus compliquée, plus encombrante, la somme d'un grand nombre de termes. Nous savons déjà que l'intégrale de la somme ou de la différence de fonctions est égale à la somme ou à la différence des intégrales de ces fonctions. Par suite,

$$\ln(1+\beta)=$$

$$=\int_0^\beta 1\,dt-\int_0^\beta t\,dt+\int_0^\beta t^2\,dt-\int_0^\beta t^3\,dt+\ldots-\int_0^\beta t^{2n-1}\,dt+$$

$$+\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt.$$

Nous pouvons calculer chacune des intégrales du deuxième membre, excepté la dernière. Voici comment:

$$\int_0^\beta 1\,dt=\beta,\quad \int_0^\beta t\,dt=\frac{\beta^2}{2},\quad \int_0^\beta t^2\,dt=\frac{\beta^3}{3},$$

$$\int_0^\beta t^3\,dt=\frac{\beta^4}{4},\ \ldots,\ \int_0^\beta t^{2n-1}\,dt=\frac{\beta^{2n}}{2n}.$$

D'où il vient que:

$$\ln(1+\beta)=\left(\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}+\ldots-\frac{\beta^{2n}}{2n}\right)+\int_0^\beta\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt.$$

L'expression entre parenthèses dans le deuxième membre de l'égalité est un polynôme du degré $2n$, disposé suivant les puissances croissantes de β. Si la valeur de β est connue et, de plus, si l'on a choisi un nombre entier positif n (il peut être quelconque), il est facile de calculer la valeur du polynôme. Seule l'évaluation de l'intégrale $\int_0^\beta\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$ présente des difficultés. Nous démontrerons que pour $-1<$ $<\beta\leqslant 1$, on peut la rendre aussi petite que l'on veut en prenant n suffisamment grand. S'il en est ainsi, dans le calcul de $\ln(1+\beta)$, on peut omettre la dernière intégrale, en ne commettant de la sorte qu'une erreur négligeable. Nous aurons donc approximativement:

$$\ln(1+\beta)\approx\beta-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^3}{3}-\frac{\beta^4}{4}+\ldots-\frac{\beta^{2n}}{2n}.$$

15 Pour évaluer l'erreur de cette égalité approchée il faut examiner l'intégrale rejetée: $\int_0^\beta\frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$. Supposons pour

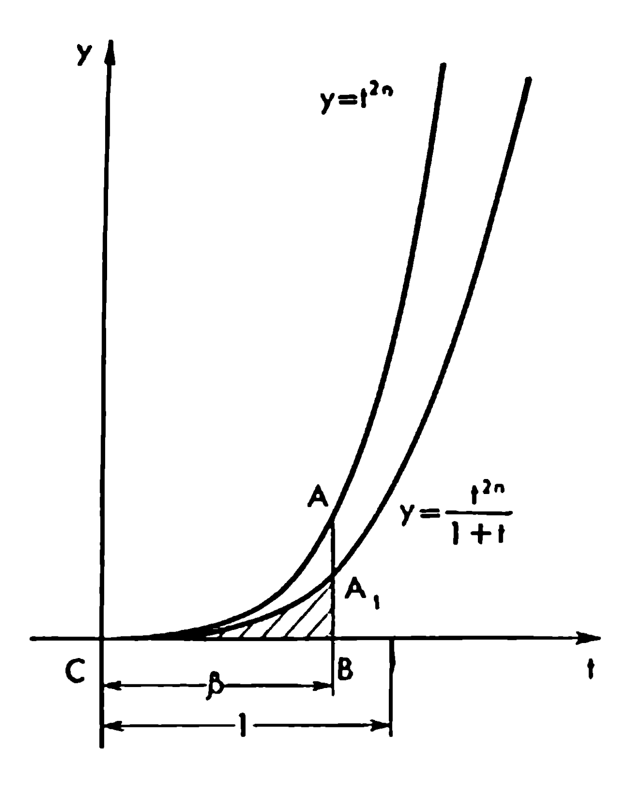


Fig. 28

commencer que $0 < \beta \leqslant 1$. Dans les limites de l'intégration, t reste positif et, par conséquent,

$$0 < \frac{t^{2n}}{1+t} < t^{2n}.$$

Ceci signifie que le graphique de la fonction $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$ est situé au-dessous du graphique de la fonction $y = t^{2n}$(fig. 28) ; D'où il s'ensuit que l'aire CBA_1 est plus petite que l'aire CBA, c'est-à-dire :

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}\, dt < \int_0^\beta t^{2n}\, dt = \frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}.$$

Donc, l'erreur de l'égalité approchée que nous avons déduite est inférieure à $\frac{\beta^{2n+1}}{2n+1}$; étant donné que $0 < \beta \leqslant 1$, cette erreur peut être réduite autant que l'on veut quand n

est suffisamment grand. Prenons, par exemple, $\beta = 1$; la formule déduite plus haut devient:

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n},$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{2n+1}$. Si nous voulons calculer par ce procédé ln 2 avec une précision de 0,001, il faut que $\frac{1}{2n+1} < 0{,}001$, c'est-à-dire $2n + 1 > 1000$; on peut satisfaire à cette condition en posant $2n = 1000$. Mais ceci signifie que le premier membre de l'égalité doit comprendre 1000 termes dont il faut trouver la somme. Un tel travail est évidemment extrêmement long; nous allons voir bientôt qu'on peut l'éviter en se servant d'une autre formule pour ln 2.

16 Revenons à l'intégrale $\int_0^\beta \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt$, mais posons maintenant $-1 < \beta < 0$. Nous savons que:

$$\int_0^\beta \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} = -\int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}.$$

L'intégrale $\int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ est égale à l'aire de la figure $ABCK$, hachurée fig. 29. Cette figure est située au-dessus de Ct, car $y = \frac{t^{2n}}{1+t} > 0$ pour t — 1. Donc l'aire $ABCK$ est un nombre positif, autrement dit 1 intégrale $\int_\beta^0 \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ est un nombre positif. Il ne diffère de l'intégrale $\int_0^\beta \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$ que

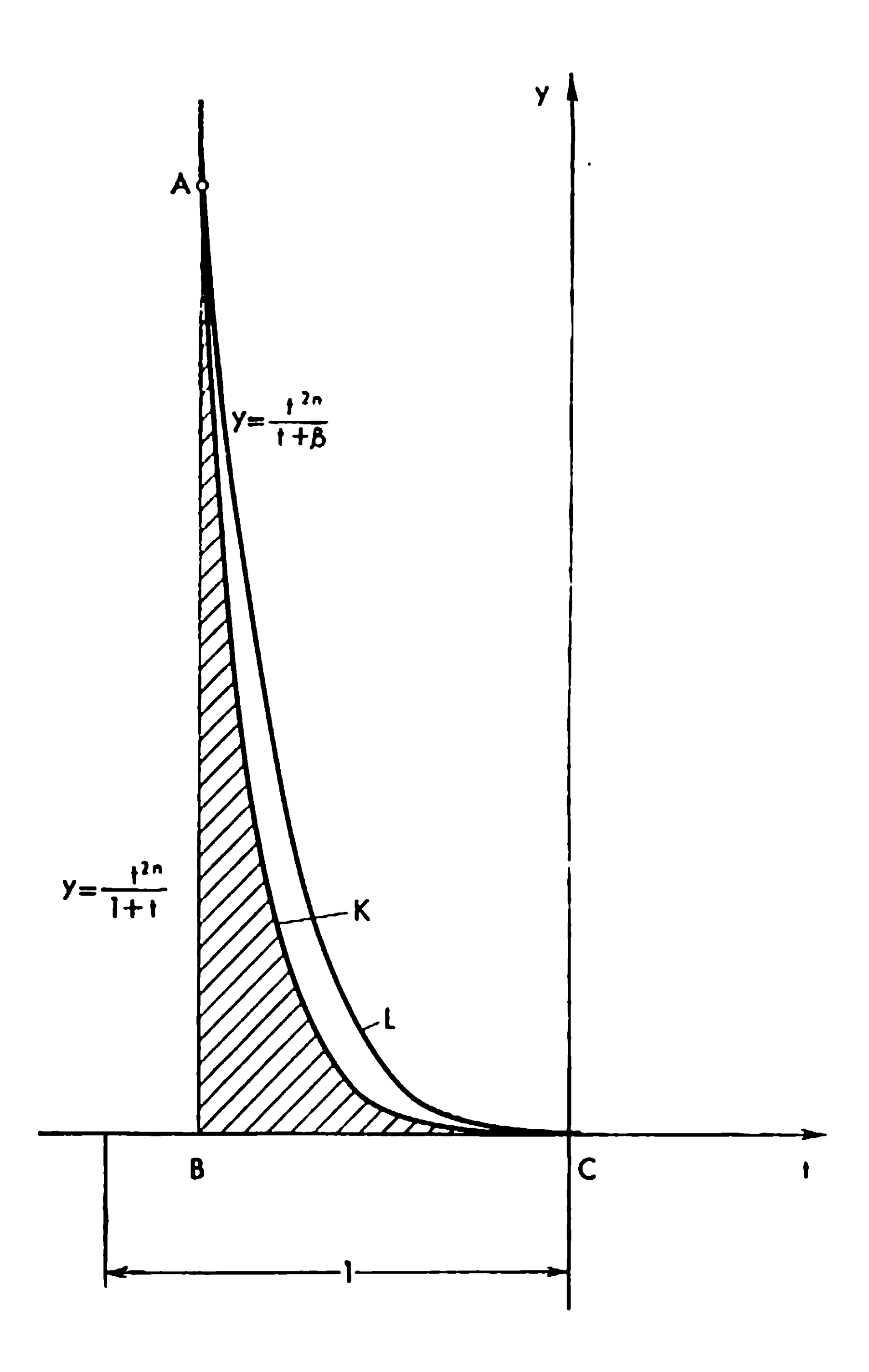


Fig. 29

par le signe et est égal, par conséquent, à la valeur absolue de cette dernière:

$$\int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} = \left| \int_{0}^{\beta} \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} \right|.$$

Remarquons de plus que pour $t > \beta$ et $\beta > -1$, l'inégalité

$$1 + t > 1 + \beta > 0$$

est satisfaite, d'où

$$\frac{1}{1+t} < \frac{1}{1+\beta}$$

et

$$\frac{t^{2n}}{1+t} < \frac{t^{2n}}{1+\beta}.$$

Ceci signifie que le graphique de la fonction $y = \frac{t^{2n}}{1+t}$ est situé au-dessous du graphique de la fonction $y = \frac{t^{2n}}{1+\beta}$ dans l'intervalle $\beta < t < 0$ (fig. 29). L'aire $ABCK$ est donc plus petite que l'aire $ABCL$:

$$\int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} < \int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}\,dt}{1+\beta}.$$

Le deuxième membre de l'inégalité est facile à calculer:

$$\int_{\beta}^{0} \frac{1}{1+\beta}\, t^{2n}\,dt = \frac{1}{1+\beta} \int_{\beta}^{0} t^{2n}\,dt = \frac{1}{1+\beta}\, \frac{0^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{2n+1} =$$

$$= -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$$

(c'est un nombre positif, car $\beta^{2n+1} < 0$, $1 + \beta > 0$ et $2n + 1 > 0$. Il en suit,

$$\left| \int_{0}^{\beta} \frac{t^{2n}}{1+t}\,dt \right| = \int_{\beta}^{0} \frac{t^{2n}\,dt}{1+t} < -\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}.$$

C'est pourquoi, en rejetant dans l'expression pour $\ln(1+\beta)$ le terme $\int_0^\beta \frac{t^{2n}\,dt}{1+t}$, nous faisons une erreur dont la valeur absolue est inférieure à $-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$ $(-1 \leqslant \beta < 0)$. Elle tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

Donc, la formule approchée:

$$\ln(1+\beta) \approx \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \ldots - \frac{\beta^{2n}}{2n}$$

est juste pour $-1 < \beta < 0$ avec une précision de $-\frac{\beta^{2n+1}}{(2n+1)(1+\beta)}$.

Posons, par exemple, $\beta = -\frac{1}{2}$; l'erreur de la formule approchée sera alors inférieure à

$$\frac{1}{2^{2n+1}} : \left[\frac{1}{2}(2n+1)\right] = \frac{1}{(2n+1)\,2^{2n}}.$$

Si l'on prend $n = 4$, la dernière fraction sera égale à $\frac{1}{9 \cdot 2^7} = \frac{1}{9 \cdot 256} = \frac{1}{2304} < 0{,}0005$. Par conséquent, avec ce degré de précision, on peut écrire:

$$\ln\frac{1}{2} \approx -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} - \frac{1}{2^4 \cdot 4} - \frac{1}{2^5 \cdot 5} - \frac{1}{2^6 \cdot 6} - \frac{1}{2^7 \cdot 7} - \frac{1}{2^8 \cdot 8}.$$

Effectuons les calculs:

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000, \quad \frac{1}{2^2 \cdot 2} = 0{,}1250; \quad \frac{1}{2^3 \cdot 3} = 0{,}0417,$$

$$\frac{1}{2^4 \cdot 4} = 0{,}0156, \quad \frac{1}{2^5 \cdot 5} = 0{,}0062, \quad \frac{1}{2^6 \cdot 6} = 0{,}0026,$$

$$\frac{1}{2^7 \cdot 7} = 0{,}0011, \quad \frac{1}{2^8 \cdot 8} = 0{,}0005.$$

Nous obtenons:

$$\ln \frac{1}{2} \approx -0{,}6927 \approx -0{,}693$$

avec une précision de 0,001 (nous tenons compte de l'erreur de l'ordre de 0,0005 inhérent à la formule, de plus, la transformation de chacun des huit termes en fraction décimale, pouvait comporter une erreur de 0,00005).

Comme $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, il en découle que

$$\ln 2 \approx 0{,}693.$$

Si, dans la formule approchée pour $\ln(1+\beta)$ on pose $\beta = -\frac{2}{3}$, on peut calculer de la même façon $\ln \frac{1}{3}$ et, par conséquent, $\ln 3 = -\ln \frac{1}{3}$. D'une façon générale, si l'on prend $\beta = -\frac{k}{k+1}$, on obtient $\ln\left(1-\frac{k}{k+1}\right) = \ln \frac{1}{k+1}$, et, par conséquent, $\ln(k+1) = -\ln \frac{1}{k+1}$. Toutefois, un tel procédé de calcul des logarithmes sera encore fort laborieux. Ainsi, par exemple, si nous voulons calculer ln 11, en posant $k+1=11$, c'est-à-dire $k=10$, nous devons poser $\beta = -\frac{10}{11}$. L'erreur de la formule approchée sera alors inférieure à:

$$\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1} : (2n+1)\left(1-\frac{10}{11}\right) = \frac{11}{2n+1}\left(\frac{10}{11}\right)^{2n+1}.$$

Nous avons:

$$\frac{10}{11} \approx 0{,}91\,; \quad \left(\frac{10}{11}\right)^2 \approx 0{,}83\,; \quad \left(\frac{10}{11}\right)^4 \approx 0{,}69\,; \quad \left(\frac{10}{11}\right)^8 \approx 0{,}48;$$

$$\left(\frac{10}{11}\right)^{16} \approx 0{,}29\,; \quad \left(\frac{10}{11}\right)^{32} \approx 0{,}08\,; \quad \left(\frac{10}{11}\right)^{64} \approx 0{,}006\,;$$

$$\left(\frac{10}{11}\right)^{65} \approx 0{,}005.$$

Par conséquent, c'est seulement pour $2n+1=65$ que l'erreur de la formule approchée servant au calcul de $\ln \frac{1}{11}$ sera inférieure à $\frac{11}{65} \cdot 0{,}005 \approx 0{,}001$.

Il est évident que les calculs effectués pour trouver $\ln \frac{1}{11}$ nécessiteront dans ce cas un très gros travail, car il faudra évaluer une somme comprenant 64 termes:

$$-\frac{10}{11}-\frac{1}{2}\left(\frac{10}{11}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{10}{11}\right)^3-\ldots-\frac{1}{64}\left(\frac{10}{11}\right)^{64}.$$

17 Les conclusions auxquelles nous avons abouti en déterminant la formule approchée pour $\ln(1+\beta)$ nous engagent à chercher une autre formule exigeant moins de calculs. Une telle formule peut en effet être trouvée. Pour cela, prenons un nombre entier positif quelconque, k, et posons: $\beta=\frac{1}{2k+1}$. Nous trouvons alors:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)\approx\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)^2}+\frac{1}{3(2k+1)^3}-$$
$$-\frac{1}{4(2k+1)^4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}-\frac{1}{2n(2k+1)^{2n}}.$$

L'erreur de cette égalité approchée est plus petite que $\frac{1}{(2n+1)(2k+1)^{2n+1}}$. Prenons maintenant β négatif égal à $-\frac{1}{2k+1}$; nous obtenons une autre égalité approchée:

$$\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\approx-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2(2k+1)^2}-\frac{1}{3(2k+1)^3}-$$
$$-\frac{1}{4(2k+1)^4}-\ldots-\frac{1}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}-\frac{1}{2n(2k+1)^{2n}},$$

qui donne $\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)$ avec une erreur plus petite que

$$\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}:\left[(2n+1)\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\right]=$$

$$=\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}.$$

Soustrayons membre à membre la deuxième égalité de la première. Nous trouvons:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\approx$$

$$\approx\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{3(2k+1)^3}+\frac{2}{5(2k+1)^5}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}}.$$

L'erreur de cette égalité approchée ne dépasse pas, en valeur absolue, la somme des erreurs admises dans les formules $\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)$ et $\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)$; elle est donc inférieure à :

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}+\frac{2k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=$$

$$=\frac{4k+1}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}<\frac{4k+2}{2k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}=$$

$$=\frac{1}{k(2n+1)(2k+1)^{2n}}.$$

Transformons la différence des logarithmes après avoir observé qu'elle doit coïncider avec le logarithme du quotient. Nous obtenons:

$$\ln\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)-\ln\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)=\ln\frac{1+\frac{1}{2k+1}}{1-\frac{1}{2k+1}}=$$

$$=\ln\frac{2k+2}{2k}=\ln\frac{k+1}{k}=\ln(k+1)-\ln k.$$

Et par suite

$$\ln(k+1)-\ln k \approx \frac{2}{2k+1}+\frac{2}{3(2k+1)^3}+\frac{2}{5(2k+1)^5}+\ldots+$$
$$+\frac{2}{(2n-1)(2k+1)^{2n-1}} \qquad (*)$$

avec une erreur inférieure à $\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2k+1)^{2n}}$.

C'est la formule cherchée. Elle permet de calculer $\ln(k+1)$ si $\ln k$ est déjà connu. En tenant compte de ce que $\ln 1 = 0$ et en y posant $k = 1$, nous trouvons $\ln 2$ avec une erreur inférieure à

$$\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{3^{2n}}.$$

Prenons $n = 5$; on peut alors affirmer que l'erreur sera inférieure à $\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{10}}=\frac{1}{11\cdot 59049}<0{,}000002$. Il en suit donc que,

$$\ln 2=\ln 2-\ln 1\approx\frac{2}{3}+\frac{2}{3\cdot 3^3}+\frac{2}{5\cdot 3^5}+\frac{2}{7\cdot 3^7}+\frac{2}{9\cdot 3^9}$$

avec une erreur inférieure à 0,000002. En transformant chacune des cinq fractions en fraction décimale à 6 chiffres après la virgule (c'est-à-dire avec une précision de 0,0000005) et en additionnant, nous obtenons la valeur de $\ln 2$ avec une précision de $0{,}000002 + 0{,}0000005\cdot 5 < 0{,}000005$:

$$\ln 2 \approx 0{,}693146 \approx 0{,}69315.$$

Posons maintenant dans la formule (*) $k = 2$ et $n = 3$; nous obtenons:

$$\ln 3-\ln 2\approx\frac{2}{5}+\frac{2}{3\cdot 5^3}+\frac{2}{5\cdot 5^5}\approx 0{,}40546$$

avec une erreur inférieure à

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^6}=\frac{1}{14\cdot 15625}<0{,}000005.$$

Il en résulte que :

$$\ln 3 \approx \ln 2 + 0{,}40546 \approx 1{,}09861.$$

Par la suite nous obtenons $\ln 4 = 2 \ln 2 \approx 1{,}38630$; en posant dans la formule (*) $k = 4$ et $n = 3$, nous trouvons :

$$\ln 5 - \ln 4 \approx \frac{2}{9} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} \approx 0{,}223144 \approx 0{,}22314$$

avec une erreur inférieure à

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9^6} = \frac{1}{28 \cdot 531441} < 0{,}0000001.$$

Il s'ensuit donc que :

$$\ln 5 \approx \ln 4 + 0{,}22314 \approx 1{,}60944.$$

Maintenant on peut trouver ln 10 :

$$\ln 10 = \ln 5 + \ln 2 \approx 2{,}30259.$$

Enfin, en posant dans la formule (*) $k = 10$ et $n = 2$, on obtient

$$\ln 11 - \ln 10 \approx \frac{2}{21} + \frac{2}{3 \cdot 21^3} \approx 0{,}09531$$

(l'erreur de la formule approchée est ici inférieure à $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{21^4} \approx 0{,}0000001$).
C'est pourquoi

$$\ln 11 \approx \ln 10 + 0{,}09531 \approx 2{,}39790.$$

Ces exemples suffisent pour comprendre comment on établit la table des logarithmes naturels. C'est précisément de cette façon qu'on obtient la table suivante des logarithmes des nombres entiers de 1 à 100, calculés à 0,0005 près.

18 Nous avons vu que le logarithme d'un prodnit s'obtient per additiou, le logarithme d'un quotient par soustraction, le logarithme d'une puissance par multiplication

Table des logarithmes naturels ou népériens (de 1 à 100)

n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$	n	$\ln n$
1	0,000	21	3,045	41	3,714	61	4,111	81	4,394
2	0,693	22	3,091	42	3,738	62	4,127	82	4,407
3	1,099	23	3,135	43	3,761	63	4,143	83	4,419
4	1,386	24	3,178	44	3,784	64	4,159	84	4,431
5	1,609	25	3,219	45	3,807	65	4,174	85	4,443
6	1,792	26	3,258	46	3,829	66	4,190	86	4,454
7	1,946	27	3,296	47	3,850	67	4,205	87	4,466
8	2,079	28	3,332	48	3,871	68	4,220	88	4,477
9	2,197	29	3,367	49	3,892	69	4,234	89	4,489
10	2,303	30	3,401	50	3,912	70	4,248	90	4,500
11	2,398	31	3,434	51	3,932	71	4,263	91	4,511
12	2,485	32	3,466	52	3,951	72	4,277	92	4,522
13	2,565	33	3,497	53	3,970	73	4,290	93	4,533
14	2,639	34	3,526	54	3,989	74	4,304	94	4,543
15	2,708	35	3,555	55	4,007	75	4,317	95	4,554
16	2,773	36	3,584	56	4,025	76	4,331	96	4,564
17	2,833	37	3,611	57	4,043	77	4,344	97	4,575
18	2,890	38	3,638	58	4,060	78	4,357	98	4,585
19	2,944	39	3,664	59	4,078	79	4,369	99	4,595
20	2,996	40	3,689	60	4,094	80	4,382	100	4,605

(par l'exposant de la puissance) et le logarithme d'une racine par division (par l'exposant de la racine). C'est pourquoi, si l'on a une table dans laquelle à côté des nombres figurent leurs logarithmes (table des logarithmes), on peut s'en servir en remplaçant la multiplication par une addition, la division par une soustraction, l'élévation à une puissance par une multiplication, l'extraction d'une racine par une division, c'est-à-dire accomplir chaque fois des opérations plus simples. Comment il faut procéder, vous le trouverez dans un

manuel d'algèbre courant pour élèves des classes terminales. Nous nous contenterons ici d'un exemple simple.

Supposons qu'on ait à calculer $c = \sqrt[5]{2}$. Servons-nous de la valeur calculée plus haut $\ln 2 \approx 0{,}693$; en la divisant par 5 nous obtenons : $\ln \sqrt[5]{2} = \frac{1}{5} \ln 2 \approx 0{,}139$. Il reste à trouver le nombre $\sqrt[5]{2}$ d'après son logarithme. Notre table n'est pas adaptée à ce but ; elle contient les logarithmes 0,000 (correspondant au nombre 1) et 0,693 (correspondant au nombre 2) ; le premier est trop petit, le deuxième, trop grand. En se référant à cette table, on ne peut dire que $1 < \sqrt[5]{2} < 2$. Mais on peut remarquer que $\ln (10 \sqrt[5]{2}) = \ln 10 + \ln \sqrt[5]{2} = 2{,}303 + 0{,}139 = 2{,}442$. Dans notre table le plus petit logarithme voisin est 2,398 ($= \ln 11$), le plus grand logarithme voisin est 2,485 ($= \ln 12$), donc $11 < 10 \sqrt[5]{2} < 12$. En notant que 2,442 se trouve à peu près au milieu entre $\ln 11$ et $\ln 12$ (la moyenne arithmétique de ces deux derniers nombres est 2,441) on peut poser $10 \sqrt[5]{2} \approx 11{,}5$, c'est-à-dire $\sqrt[5]{2} \approx 1{,}15$. Avant de vérifier, signalons au préalable que

$$\ln (100 \sqrt[5]{2}) = \ln 100 + \ln \sqrt[5]{2} = 4{,}605 + 0{,}139 = 4{,}744$$

et

$$\ln 115 = \ln 5 + \ln 23 = 1{,}609 + 3{,}135 = 4\ 744.$$

19 Pour construire le graphique de la fonction $y = \ln x$, il faut choisir des axes de référence et une unité, puis pour chaque x ($x > 0$) porter la valeur $\ln x$ sur la perpendiculaire à Ox, déviée au point correspondant de l'axe. Les extrémités des perpendiculaires obtenues pour tous les x possibles sont situées sur une courbe qui est le graphique du logarithme naturel. Il est représenté fig. 30, *a*. Au-dessous de lui, pour comparaison, on a donné le graphique (fig. 30, *b*) où $\ln x$ est représenté par une aire. Sur les deux figures, on

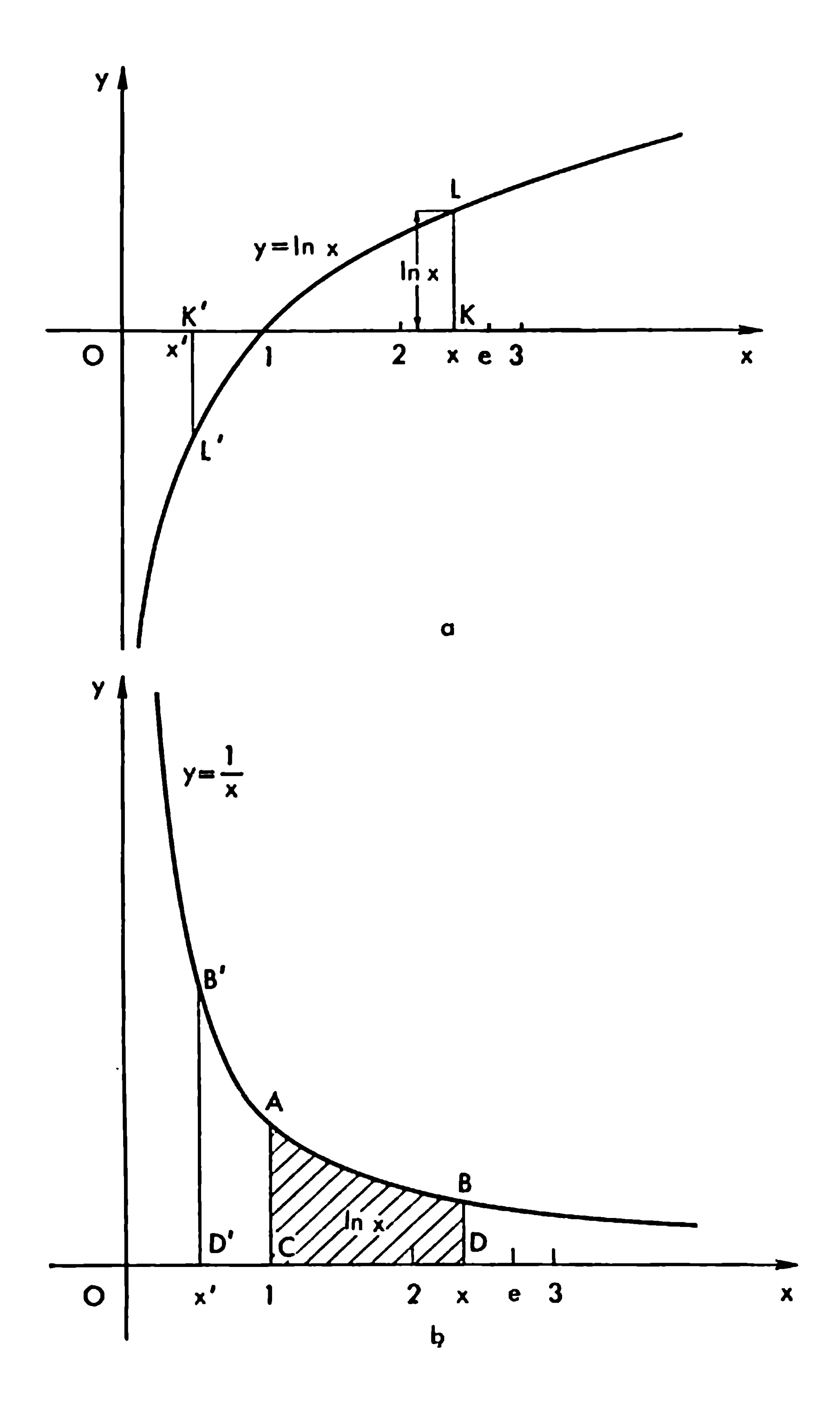


Fig. 30

a choisi la même unité. Pour une même valeur de x, on peut affirmer que l'aire du trapèze curviligne $ACDB$ de la fig. 30, *b* contient le même nombre d'unités carrées que le segment KL de la fig. 30, *a* contient d'unités de longueur.

Remarquons que si $0 < x' < 1$,

$$\ln x' = \int_1^{x_1} \frac{dx}{x} = -\int_{x'}^1 \frac{dx}{x},$$

c'est-à-dire $\ln x'$ est un nombre négatif dont la valeur absolue est égale à l'aire du trapèze $B'D'CA$; c'est pourquoi $\ln x'$ est dans ce cas représenté sur la fig. 30, *a* par le segment $K'L'$ porté au-dessous de l'axe Ox.

Toutes les propriétés du graphique de la fonction $y = \ln x$ découlent de la définition et des propriétés du logarithme naturel. Par exemple, $\ln x$ est négatif pour $x < 1$, il devient nul pour $x = 1$ et positif pour $x > 1$. Aussi le graphique du logarithme est-il situé au-dessous de Ox pour $x < 1$, coupe Ox pour $x = 1$ et est situé au-dessus de Ox pour $x > 1$. De plus, $y = \ln x$ croît à mesure que x croît. Cette propriété est évidente quand $x > 1$ (v. fig. 30, *b*), mais elle est vraie également quand $x = x' < 1$. En effet, si x' croît en restant inférieur à l'unité, la valeur absolue de l'aire $B'D'CA$ (fig. 30, *b*) décroît ; or, ceci signifie que $\ln x$, qui ne se distingue de cette aire que par le signe, croît.

Sur le graphique, la croissance du logarithme s'exprime par le fait que la courbe a la forme d'une pente de côte s'élevant de la gauche vers la droite. L'inclinaison de cette pente, forte au début, s'adoucit par la suite de plus en plus. Pour faire image, nous appellerons dans la suite de l'exposé le graphique du logarithme pente logarithmique.

En suivant vers la droite en partant du point O un sentier horizontal tracé le long de Ox, nous voyons d'abord, en regardant vers le bas, un abîme infini au fond duquel se perd la pente logarithmique. Pourtant, il suffit de fran-

chir un pas égal à l'unité de longueur pour que l'abîme soit dépassé. En continuant d'avancer le long de ce sentier, nous remarquons qu'à chaque pas la pente devient plus haute. Ainsi, après deux pas ($x = 2$) son altitude sera $\ln 2 = 0{,}693$; après trois pas — $\ln 3 = 1{,}099$ et ainsi de suite. Evaluons de combien la pente s'élève quand, après m pas, nous en faisons encore un. Comme après m pas (chacun égal à l'unité) l'altitude de la pente sera $\ln m$ et qu'après $m + 1$ pas, elle sera $\ln (m + 1)$, l'élévation de la pente pour un pas sera :

$$\ln (m+1) - \ln m = \ln \frac{m+1}{m} = \ln \left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

Plus le nombre de pas sera grand, plus $\frac{1}{m}$ sera petit, plus $1 + \frac{1}{m}$ se rapprochera de l'unité et plus $\ln \left(1 + \frac{1}{m}\right)$ se rapprochera de zéro. Ceci signifie que l'élévation de la pente devient de moins en moins sensible à mesure que nous avançons vers la droite, autrement dit que la pente logarithmique devient en effet de plus en plus douce.

Malgré la douceur de la pente celle-ci continue à monter indéfiniment et si nous continuons à suivre assez longtemps notre sentier horizontal, la pente s'élèvera toujours au-dessus de nous aussi haut que nous voudrions.

En effet, après 2^m pas l'altitude du versant sera égale à

$$\ln 2^m = m \ln 2 = 0{,}693m,$$

or, pour m suffisamment grand, ce nombre est aussi grand qu'on le voudra.

Si, au lieu de suivre un sentier horizontal, on emprunte un autre sentier rectiligne mais incliné vers le haut ne serait-ce que très faiblement (fig. 31, *a*), ce dernier, tôt ou tard, nous permettra non seulement d'atteindre obligatoirement la pente logarithmique, mais si nous continuons à monter, de dépasser cette pente en la laissant en bas, au-dessous de nous (fig. 31, *b*).

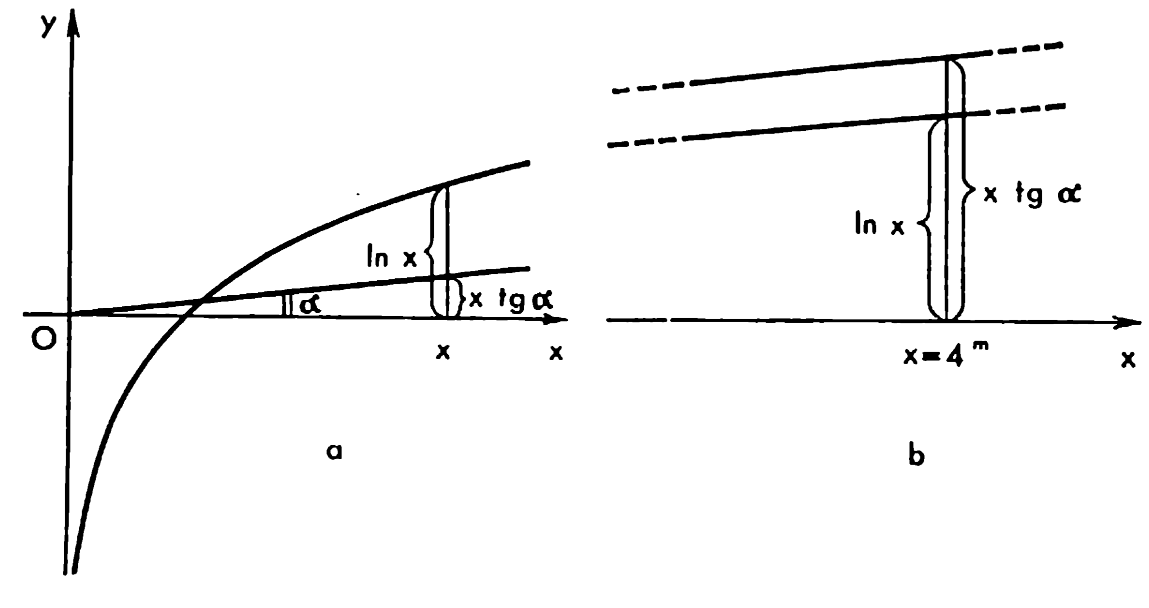


Fig. 31

Pour le vérifier, démontrons le lemme suivant: pour tout m naturel, l'inégalité $\frac{4^m}{m^2} \geqslant 4$ est juste.

En effet, quand m s'accroît de 1, la fraction $\frac{4^m}{m^2}$ croît, autrement dit, $\frac{4^m}{m^2} < \frac{4^{m+1}}{(m+1)^2}$; ceci découle de l'inégalité:

$$\frac{4^{m+1}}{(m+1)^2} : \frac{4^m}{m^2} = \frac{4m^2}{(m+1)^2} = \left(\frac{2m}{m+1}\right)^2 = \left(\frac{m+m}{m+1}\right)^2 > 1,$$

qui est vraie pour $m \geqslant 1$. C'est pourquoi parmi les fractions

$$\frac{4^1}{1^2}, \ \frac{4^2}{2^2}, \ \ldots, \ \frac{4^m}{m^2}, \ \ldots$$

la première a la plus petite valeur, on a donc toujours

$$\frac{4^1}{1^2} \leqslant \frac{4^m}{m^2},$$

ce que nous voulions démontrer.

Or pour chaque point du sentier rectiligne incliné nous avons la relation

$$y = x \operatorname{tg} \alpha$$

où α est l'angle d'inclinaison du sentier (α étant un angle aigu, $\operatorname{tg} \alpha > 0$). Si $x = 4^m$, la hauteur du sentier sera pour ce x $4^m \operatorname{tg} \alpha$, et l'altitude de la pente logarithmique, $\ln (4^m) = m \ln 4$. Le rapport de la première hauteur à la deuxième est égal à

$$\frac{4^m \operatorname{tg} \alpha}{m \ln 4} = \frac{4^m \operatorname{tg} \alpha}{m^2 \ln 4} m.$$

Or nous avons démontré plus haut que $\frac{4^m}{m^2} \geqslant 4$; par suite le rapport de la hauteur du sentier à l'altitude de la pente logarithmique ne sera pas inférieur à $\frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{\ln 4} m$, qui, pour m suffisamment grand, pourra être aussi grand qu'on le voudra. Par conséquent, pour $x = 4^m$ et pour m assez grand, le sentier rectiligne incliné sera de beaucoup plus élevé que la pente logarithmique (voir fig. 31, *b*).

Il est remarquable que la pente logarithmique a une forme arrondie sans aucun creux, partout convexe vers le haut. Cette propriété peut être exprimée géométriquement : tout arc du graphique du logarithme est situé au-dessus de la corde de cet arc (fig. 32). Désignons les abscisses des extrémités d'une corde arbitraire L_1L_2 par x_1 et x_2; nous allons vérifier que pour la valeur moyenne de $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ le point L de l'arc doit être en effet situé au-dessus du point moyen correspondant de la corde M.

En effet :

$$NL = \ln \frac{x_1 + x_2}{2} ,$$

et

$$NM = \frac{K_1L_1 + K_2L_2}{2}$$

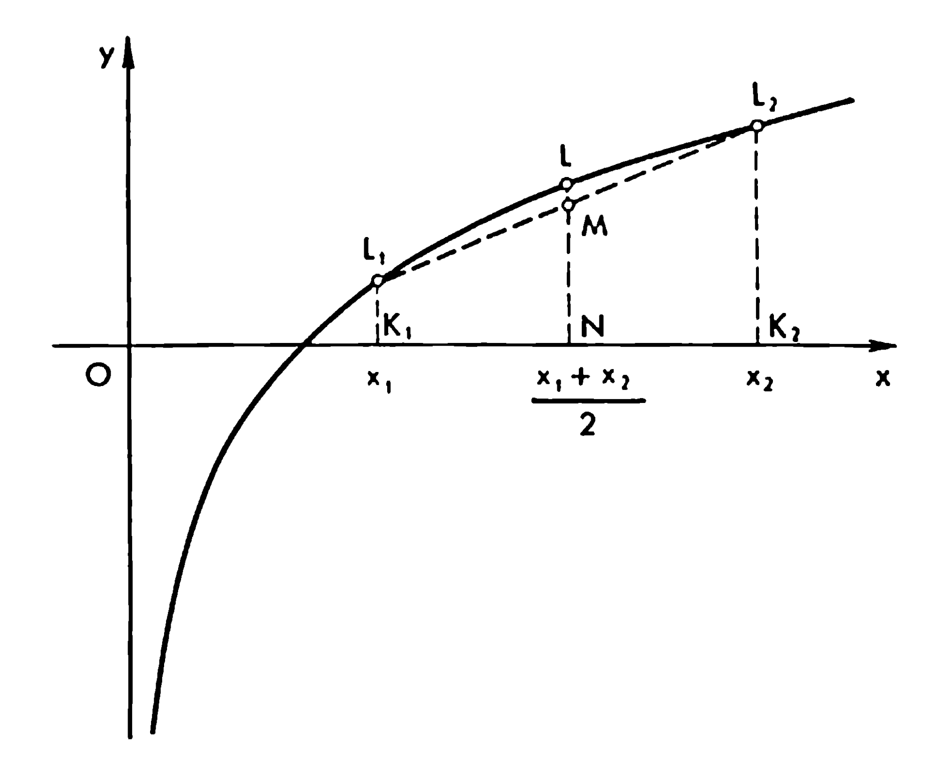


Fig. 32

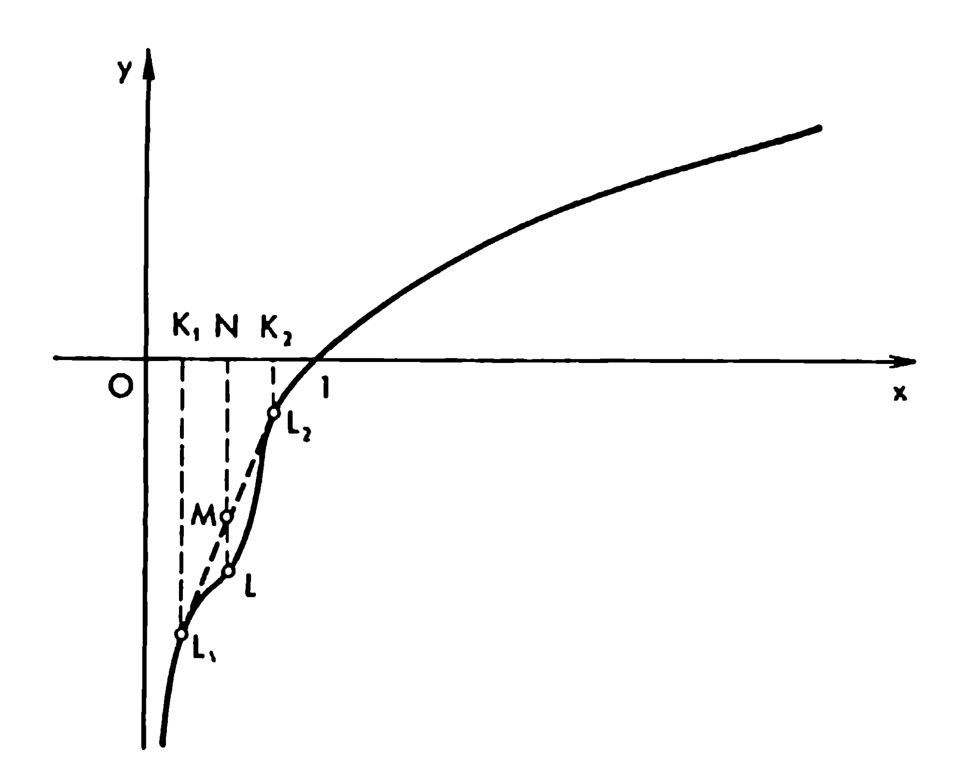


Fig. 33

(comme médiane du trapèze), c'est-à-dire:

$$NM = \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}$$

Il s'agit de démontrer que

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2}.$$

Mais,

$$\frac{\ln x_1 + \ln x_2}{2} = \frac{1}{2} \ln (x_1 x_2) = \ln \sqrt{x_1 x_2}.$$

Il faut donc démontrer que

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \ln \sqrt{x_1 x_2}.$$

Or

$$(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 > 0$$

(si x_1 et x_2 sont des nombres positifs différents). Il en suit

$$x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1 x_2},$$

et par suite,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} > \sqrt{x_1 x_2}$$

et enfin,

$$\ln \frac{x_1 + x_2}{2} > \ln \sqrt{x_1 x_2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi, quel que soit l'arc du graphique du logarithme, le point de l'arc correspondant à la moyenne arithmétique des abscisses des extrémités est situé au-dessus du milieu de la corde. Il en découle qu'il ne doit pas y avoir de creux sur le graphique du logarithme.

En effet, s'il y avait un tel creux (fig. 33), on trouverait un arc pour lequel la propriété mentionnée ne serait pas

respectée (le milieu M de la corde ne serait pas au-dessous, mais au-dessus du point L correspondant de l'arc).

En s'appuyant sur les propriétés du logarithme, on pourrait également déduire d'autres propriétés intéressantes du graphique du logarithme, mais nous nous contenterons de ceci.

20 Les logarithmes naturels apparaissent dans la résolution de nombreux problèmes de mathématiques et de physique n'ayant, à première vue, aucun rapport avec les aires des trapèzes curvilignes limités par des arcs d'hyperbole. Voici un problème de ce genre qui préoccupa l'éminent mathématicien russe Tchébychev : trouver une formule la plus simple possible permettant de calculer approximativement la quantité de tous les nombres premiers ne dépassant pas un nombre donné n quelconque.

Si n n'est pas grand, le problème de cette quantité — on la désigne par la notation $\pi(n)$ (où π n'a rien à voir avec le nombre connu 3,14159...) — a une solution assez simple. Ainsi, quand $n = 10$, les nombres premiers non supérieurs à 10 sont : 2, 3, 5, 7 ; leur quantité est égale à 4, par conséquent $\pi(10) = 4$. Quand $n = 100$, en se servant du crible d'Eratosthène bien connu, nous obtenons 25 nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 ; par conséquent, $\pi(100) = 25$. Toutefois, si n est grand, le problème se complique considérablement. Comment trouver $\pi(n)$, ne serait-ce que très approximativement, quand n est égal à un million, un billion et ainsi de suite?

Tchébychev a trouvé que, pour évaluer d'une façon approchée $\pi(n)$, il suffit de diviser n par le logarithme naturel de n :

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n};$$

l'erreur relative de cette égalité (exprimée en fractions de nombre $\pi(n)$) peut être grande, mais elle tend vers zéro

quand n tend vers l'infini. La formule approchée de Tchébychev est particulièrement commode quand n est une puissance de 10 avec un exposant positif entier: $n = 10^k$. Nous obtenons alors $\ln n = \ln 10^k = k \ln 10 \approx 2{,}303k$ et, par conséquent,

$$\pi(10^k) \approx \frac{10^k}{2{,}303k}.$$

Comme $\frac{1}{2{,}303} \approx 0{,}434$, nous pouvons obtenir une formule encore plus commode pour les calculs:

$$\pi(10^k) \approx 0{,}434 \frac{10^k}{k}.$$

Ainsi, pour $k = 1$ et $k = 2$ nous trouvons: $\pi(10) \approx$ $\approx 0{,}434 \cdot 10 = 4{,}34$ (résultat juste: 4),

$\pi(100) \approx 0{,}434 \cdot \frac{100}{2} \approx 21{,}7$ (résultat juste: 25),

En poursuivant, nous obtiendrions ceci:

$\pi(1000) \approx 0{,}434 \cdot \frac{1000}{3} \approx 145$ (résultat juste: 168),

$\pi(10000) \approx 0{,}434 \cdot \frac{10\,000}{4} \approx 1090$ (résultat juste: 1229),

$\pi(10^6) \approx 0{,}434 \cdot \frac{10^6}{6} \approx 72300$ (résultat juste: 78 498).

L'erreur relative pour le dernier résultat est:

$$\frac{78\,498 - 72\,300}{78\,498} \approx 0{,}08,$$

ou 8 % ; elle est encore très importante. Toutefois, on pourrait démontrer de façon très rigoureuse que l'erreur relative de la formule de Tchébychev peut être réduite autant que l'on veut si 10^k est suffisamment grand. Il arrivera un moment où elle sera inférieure à 1 %, puis à 0,1 %, puis à 0,001 % et ainsi de suite. C'est ce qui détermine la grande valeur théorique de la formule de Tchébychev.

Tchébychev a encore proposé une autre formule pour le calcul approximatif de $\pi(n)$, un peu plus compliquée, mais donnant, en revanche, une bien meilleure approximation.

La voici:

$$\pi(n) \approx \int_0^n \frac{dt}{\ln t}.$$

Sans effectuer les calculs, indiquons seulement quelques résultats:

$$\int_2^{1\,000} \frac{dt}{\ln t} \approx 177 \quad (\pi(1000) = 168);$$

$$\int_0^{10\,000} \frac{dt}{\ln t} \approx 1245 \quad (\pi(10\,000) = 1229).$$

$$\int_2^{1\,000\,000} \frac{dt}{\ln t} \approx 78\,627 \quad (\pi(1\,000\,000) = 78\,498).$$

L'erreur relative de l'égalité approchée

$$\pi(1\,000\,000) \approx \int_2^{1\,000\,000} \frac{dt}{\ln t},$$

est, par conséquent, la suivante:

$$\frac{|78\,498 - 78\,627|}{78\,498} \approx 0{,}0016,$$

ou 0,16%.

21 Nous avons vu que

$$\ln 2 = 0{,}69315 < 1, \text{ et que } \ln 3 = 1{,}09861 > 1.$$

Ceci signifie que l'aire $ACDB$ (fig. 34) est inférieure à 1 et que l'aire ACD_1B_1 est supérieure à 1. Il faut s'attendre à trouver, entre les points D et D_1, un point D' tel que l'aire $ACD'B'$ sera égale à 1. Ce point D' existe réellement. Si l'on désigne OD' par la lettre e, on peut affirmer que 2 <

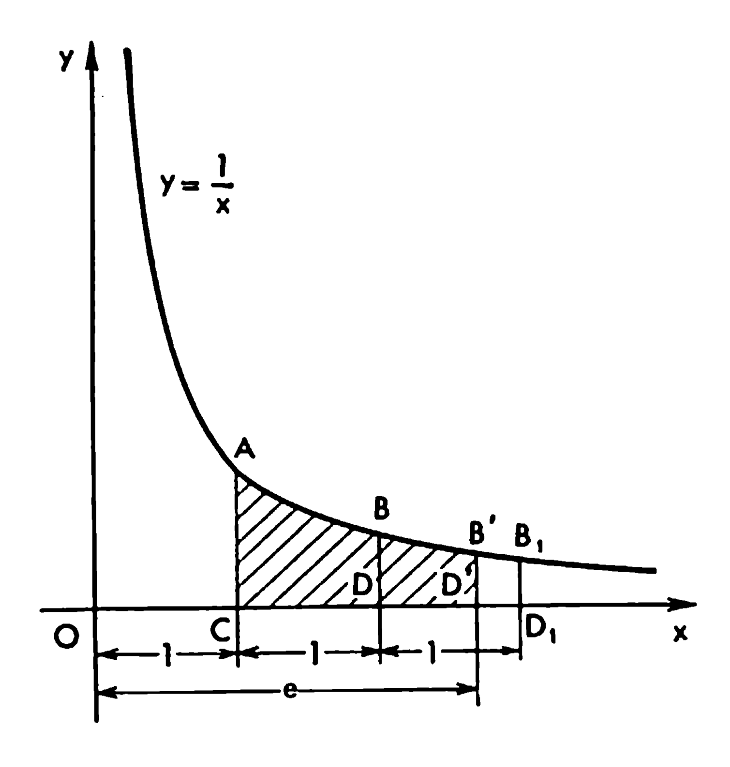


Fig. 34

$< e < 3$. En se servant de la table des logarithmes de la p. 102, on peut établir que $2{,}7 < e < 2{,}8$. En effet,

$$\ln 2{,}7 = \ln 27 - \ln 10 \approx 0{,}993 \text{ et}$$

$$\ln 2{,}8 = \ln 28 - \ln 10 = 1{,}029.$$

Il existe différents procédés permettant de trouver e avec n'importe quel degré de précision. Sans nous y arrêter, indiquons seulement le résultat:

$$e \approx 2{,}71828$$

(tous les chiffres écrits sont justes). En vertu de la définition:

$$\ln e = 1.$$

Le nombre e s'appelle *base* des logarithmes naturels ou nombre *népérien*, en l'honneur du mathématicien écossais Neper qui a publié la première table des logarithmes en 1614.

En se servant des propriétés du logarithme naturel, on peut démontrer la proposition remarquable suivante: le

logarithme naturel de tout nombre positif b est égal à l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le nombre e pour obtenir b. Autrement dit, si $\ln b = \alpha$, $b = e^{\alpha}$. Par exemple, du fait que $\ln 2 = 0{,}69315$, il s'ensuit que $2 \approx e^{0{,}69315}$; du fait que $\ln 10 \approx 2{,}30259$, il s'ensuit que $10 \approx e^{2{,}30259}$ et ainsi de suite.

Pour le démontrer, il suffit de se servir de la propriété du logarithme d'une puissance. Soit $b = e^x$; on a alors $\ln b = \ln e^x = x \ln e$. Mais $\ln e = 1$, donc:

$$\ln b = x,$$

c'est-à-dire que le logarithme naturel de b coïncide avec l'exposant de la puissance x.

Ainsi, on peut déterminer les logarithmes naturels sans recourir à des représentations géométriques. On aurait pu dire dès le début que le logarithme naturel du nombre b est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever le nombre $e \approx 2{,}71828$ pour obtenir le nombre b. Mais avec cette définition, on ne comprend pas pourquoi ce sont les exposants de puissance du nombre e qui nous intéressent et non pas d'un autre nombre quelconque. Or, si l'on introduit les logarithmes naturels comme des aires, leur définition est concrète et ne suscite aucun malentendu.

Il reste à ajouter qu'en plus des logarithmes naturels, on peut en proposer d'autres ayant une autre base. Ainsi, par exemple, le logarithme décimal du nombre b est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever 10 pour obtenir b. Le logarithme décimal du nombre b est désigné par le symbole $\log b$. Si l'on pose $\log b = \beta$, par définition on doit avoir $b = 10^{\beta}$; il est évident que $\log 10 = 1$. Les logarithmes décimaux sont étudiés en détail dans le cours d'algèbre des classes terminales, toutes leurs propriétés sont déduites, non pas géométriquement, mais sur la base des propriétés connues des exposants d'une puissance.

Entre les logarithmes décimaux et naturels, il existe une relation simple. Soit $\ln b = \alpha$ et $\log b = \beta$. Ceci signifie

que $b = e^{\alpha}$ et $b = 10^{\beta}$, c'est-à-dire que $e^{\alpha} = 10^{\beta}$. Par conséquent, $\ln e^{\alpha} = \ln 10^{\beta}$ ou $\alpha \ln e = \beta \ln 10$; autrement dit $\alpha = \beta \cdot 2{,}30259$. Ainsi, $\ln b = 2{,}30259 \log b$, d'où:

$$\log b = \frac{1}{2{,}30259} \ln b = 0{,}43429 \ln b.$$

Avec une table des logarithmes naturels on obtient, en multipliant chaque logarithme par 0,43429, la table des logarithmes décimaux. Par exemple,

$$\log 2 = 0{,}43429 \ln 2 = 0{,}43429 \cdot 0{,}69315 \approx 0{,}30103.$$

Pour log 10 nous devons obtenir l'unité:

$$\log 10 = 0{,}43429 \ln 10 \approx 0{,}43429 \cdot 2{,}30259 = 1.$$

Le fait que l'on choisit comme base dans le système de logarithmes décimaux le nombre 10 — base du système numérique décimal — facilite considérablement les calculs au moyen des logarithmes. Ainsi, sachant que $\log 2 = 0{,}30103$ et $\log 10 = 1$, nous obtenons immédiatement:

$$\log 20 = \log 2 + \log 10 = \log 2 + 1 = 1{,}30103$$

$\log 200 = \log 2 + \log 100 = \log 2 + 2 = 2{,}30103$ et ainsi de suite.

Si, connaissant $\ln 2 = 0{,}69315$ et $\ln 10 = 2{,}302585$, nous voulions trouver ln 20 et ln 200, il faudrait faire les calculs suivants:

$$\ln 20 = \ln 2 + \ln 10 = 0{,}69315 + 2{,}30259 = 2{,}99574$$

$$\ln 200 = \ln 2 + \ln 100 = \ln 2 + 2 \ln 10 = \\ = 0{,}69315 + 4{,}60517 = 5{,}29832.$$

Aussi, quand on se sert des logarithmes pour faciliter les calculs, préfère-t-on les logarithmes décimaux. Ceci ne diminue aucunement l'importance des logarithmes naturels qui trouvent place dans la résolution des problèmes les plus divers des mathématiques et des sciences physiques.

Suites récurrentes

1 La notion de suite récurrente est une large généralisation de celle de progression arithmétique ou géométrique. En tant que cas particuliers, elle englobe également les suites de carrés ou de cubes des nombres naturels, les suites de chiffres de la décomposition décimale d'un nombre rationnel (et, d'une façon générale, toute série périodique), les suites de coefficients du quotient de la division de deux polynômes disposés par puissances croissantes de x, etc. On voit donc qu'on rencontre très souvent les suites récurrentes dans le cours de mathématiques de l'école secondaire. La théorie des suites récurrentes constitue un chapitre particulier de la discipline mathématique appelée *calcul des différences finies*. Nous allons exposer cette théorie sans exiger du lecteur des connaissances spéciales sur ce sujet (à un endroit seulement nous nous appuierons, sans démonstration, sur une proposition générale établie dans la théorie des équations algébriques linéaires).

2 Ecrivons des suites sous la forme

$$u_1, \ u_2, \ u_3, \ \ldots, \ u_n, \ \ldots, \qquad (1)$$

ou, en bref, $\{u_n\}$. S'il existe un nombre naturel k et des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (réels ou imaginaires) tels que, à partir d'un certain numéro n et pour tous les autres numéros

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \qquad (n \geqslant m \geqslant 1), \qquad (2)$$

la suite (1) est appelée *suite récurrente d'ordre* k et la relation (2), *relation de récurrence d'ordre* k.

Ainsi, une suite récurrente est caractérisée par le fait que chacun de ses termes (à partir d'un d'entre eux) s'exprime par un seul et même nombre k des termes qui le précèdent immédiatement selon la formule (2). La désignation de «récurrente» est donnée précisément pour la raison qu'ici,

pour calculer tout terme suivant, il faut retourner aux termes précédents. Voici quelques exemples de suites récurrentes.

● EXEMPLE 1. *Progression géométrique.* Soit une progression géométrique :

$$u_1 = a,\ u_2 = aq,\ u_3 = aq^2,\ \ldots,\ u_n = aq^{n-1},\ \ldots; \qquad (3)$$

pour elle, la relation (2) prend la forme :

$$u_{n+1} = qu_n. \qquad (4)$$

Ici $k = 1$ et $a_1 = q$. Donc une progression géométrique est une suite récurrente de *premier* ordre.

● EXEMPLE 2. *Progression arithmétique.* Dans le cas d'une progression arithmétique :

$$u_1 = a,\ u_2 = a + d,\ u_3 = a + 2d,\ \ldots,$$
$$\ldots,\ u_n = a + (n - 1)\,d,\ \ldots$$

nous avons :

$$u_{n+1} = u_n + d,$$

relation d'un aspect différent de la relation (2) [1]. Cependant, si nous examinons les deux relations écrites pour deux valeurs voisines de n :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + d,$$

nous obtenons en les retranchant membre à membre :

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n,$$

ou

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, \qquad (5)$$

---

[1]) Ce qui caractérise cette dernière, c'est que son deuxième membre ne comprend que les termes de la suite ayant des coefficients constants.

relation de la forme (2). Ici $k = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Par conséquent, une progression arithmétique est une suite récurrente de *deuxième* ordre.

● EXEMPLE 3. Examinons le vieux problème de Fibonacci [1]) sur le nombre des lapins. On y demande de déterminer le nombre de couples de lapins adultes descendant d'un seul couple pendant une année, si l'on sait que chaque couple adulte de lapins donne naissance, chaque mois, à un nouveau couple et que les lapins nouveau-nés atteignent la maturité sexuelle au bout d'un mois. Ce qu'il y a d'intéressant dans ce problème ce n'est nullement le résultat, facile à calculer, mais la suite, dont les termes expriment le nombre total de couples de lapins adultes au moment initial, au bout d'un mois (u_2), au bout de deux mois (u_3) et, d'une façon générale, au bout de n mois (u_{n+1}). Il est évident que $u_1 = 1$. Au bout d'un mois, un couple de nouveau-nés s'ajoutera, mais le nombre des couples adultes sera le même : $u_2 = 1$. Au bout de deux mois, les lapereaux deviendront adultes et le nombre total des couples adultes sera égal à deux : $u_3 = 2$. Supposons que nous ayons déjà calculé le nombre des couples adultes au bout de $n - 1$ mois, u_n, et au bout de n mois, u_{n+1}. Etant donné qu'à ce moment u_n couples adultes, que l'on avait déjà, donnent encore u_n couples de progéniture, au bout de $n + 1$ mois, le nombre total de couples adultes sera :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \qquad (6)$$

D'où :

$$u_4 = u_3 + u_2 = 3,\ u_5 = u_4 + u_3 = 5,\ u_6 = u_5 + u_4 = 8,$$
$$u_7 = u_6 + u_5 = 13,\ \ldots .$$

---

[1]) Fibonacci ou Leonhard de Pise, mathématicien italien du moyen âge (vers 1200). Il a laissé un « Liber abaci » renfermant de nombreuses données arithmétiques et algébriques, empruntées aux peuples d'Asie Centrale et aux Byzantins qu'il a développées et élaborées avec un esprit créateur.

Nous obtenons ainsi la suite:

$$\left.\begin{array}{llll} u_1 = 1, & u_2 = 1, & u_3 = 2, & u_4 = 3, \\ u_5 = 5, & u_6 = 8, & u_7 = 13, \ldots, & \end{array}\right\} \quad (7)$$

dans laquelle chaque terme suivant est égal à la somme des deux précédents. Cette suite s'appelle *suite de Fibonacci* et ses termes, *nombres de Fibonacci*. La relation (6) montre que la suite de Fibonacci est une suite récurrente de *deuxième* ordre.

● EXEMPLE 4. Voyons, dans l'exemple suivant, la suite des carrés des nombres naturels:

$$u_1 = 1^2,\ u_2 = 2^2,\ u_3 = 3^2,\ \ldots,\ u_n = n^2,\ \ldots \quad (8)$$

Ici $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ et, par conséquent,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1. \quad (9)$$

En augmentant n d'une unité, nous obtenons:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3. \quad (10)$$

Et, par conséquent [en retranchant membre à membre (9) de (10)],

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n + 2,$$

ou

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2. \quad (11)$$

En augmentant n d'une unité dans l'égalité (11), nous aurons:

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2, \quad (12)$$

d'où [en retranchant membre à membre (11) de (12)]:

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n,$$

ou:

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \quad (13)$$

Nous avons obtenu une suite récurrente de *troisième* ordre. Par conséquent, la suite (8) est une suite récurrente

de *troisième* ordre. On se rendra compte, de façon analogue, que la suite des cubes des nombres naturels:

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ \ldots,\ n^3,\ \ldots \tag{14}$$

est une suite récurrente de *quatrième* ordre. Ses termes satisfont à la relation

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n, \tag{15}$$

que nous proposons au lecteur de déduire lui-même.

● EXEMPLE 5. Toutes les séries périodiques sont des suites récurrentes. Examinons, par exemple, la suite des chiffres de la décomposition décimale du nombre

$$\frac{761}{1332} = 0{,}57132132132\ldots$$

Alors

$$\left.\begin{array}{llll} u_1 = 5, & u_2 = 7, & u_3 = 1, & u_4 = 3, \\ u_5 = 2, & u_6 = 1, & u_7 = 3, \ldots & \end{array}\right\} \tag{16}$$

Il est évident que

$$u_{n+3} = u_n \quad (n \geqslant 3). \tag{17}$$

Pour présenter cette relation sous la forme (2), transcrivons) la de la manière suivante:

$$u_{n+3} = 0 \cdot u_{n+2} + 0 \cdot u_{n+1} + 1 \cdot u_n.$$

On voit que c'est une relation de récurrence du *troisième* ordre ($k = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$). Donc, la suite (16) est une suite récurrente de *troisième* ordre.

● EXEMPLE 6. Examinons maintenant la suite des coefficients du quotient de la division de deux polynômes disposés par puissances croissantes de x. Soit

$$P(x) = A_0 + A_1x + \ldots + A_lx,$$

et

$$Q(x) = B_0 + B_1x + \ldots + B_kx^k \quad (B_0 \neq 0).$$

Divisons $P(x)$ par $Q(x)$; si $P(x)$ ne se divise pas par $Q(x)$ sans reste, on peut poursuivre la division indéfiniment. Le quotient comprendra l'un après l'autre les termes :

$$D_0 + D_1x + D_2x^2 + D_3x^3 + \ldots + D_nx^n + \ldots$$

Examinons la suite :

$$u_1 = D_0,\ u_2 = D_1,\ \ldots,\ u_n = D_{n-1},\ \ldots \qquad (18)$$

et démontrons qu'elle est récurrente d'ordre k (rappelons que k est la puissance du diviseur). A cette fin, fixons un nombre naturel quelconque n satisfaisant à la seule condition $n \geqslant l - k + 1$ et arrêtons la division au terme du quotient contenant x^{n+k}. On obtient alors dans le reste un certain polynôme $R(x)$ comprenant x à des puissances supérieures à $n + k$. Ecrivons les relations entre le dividende, le diviseur, le quotient et le reste et nous obtenons l'identité suivante :

$$A_0 + \ldots + A_lx^l =$$
$$= (B_0 + \ldots + B_kx^k)\cdot(D_0 + \ldots + D_{n+k}x^{n+k}) + R(x).$$

Trouvons les coefficients de x^{n+k} dans le premier et le deuxième membres de cette identité et rendons-les égaux les uns aux autres. Etant donné que $n + k \geqslant l + 1$, le coefficient de x^{n+k} dans le premier membre est égal à zéro. C'est pourquoi le coefficient de x^{n+k} dans le deuxième membre doit être aussi égal à zéro. Mais les termes contenant x^{n+k} se trouvent ici seulement dans le produit $(B_0 + \ldots + B_kx^k)\cdot(D_0 + \ldots + D_{n+k}x^{n+k})$ [nous avons montré que le reste $R(x)$ contient x à des puissances plus élevées]. C'est pourquoi le coefficient cherché est

$$D_{n+k}B_0 + D_{n+k-1}B_1 + \ldots + D_nB_k\,; \qquad (19)$$

d'après ce qui précède, il doit être égal à zéro :

$$D_{n+k}B_0 + D_{n+k-1}B_1 + \ldots + D_nB_k = 0,$$

d'où (rappelons que $B_0 \neq 0$)

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0} D_{n+k-1} - \ldots - \frac{B_k}{B_0} D_n \qquad (n \geqslant l-k+1). \quad (20)$$

C'est une relation de récurrence d'*ordre* k, d'où il découle que la suite (18) est une suite récurrente d'*ordre* k.

3 De tous les exemples examinés, c'est l'exemple 6 qui présente le caractère le plus général. Nous allons montrer qu'*une suite récurrente quelconque d'ordre* k

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots, \qquad (21)$$

satisfaisant à une relation telle que

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n \qquad (n \geqslant m \geqslant 1), \qquad (22)$$

coïncide avec la suite des coefficients du quotient obtenu par division d'un certain polynôme $P(x)$ *par un polynôme*

$$Q(x) = 1 - a_1 x - \ldots - a_k x^k. \qquad (23)$$

Soit n un nombre naturel quelconque, satisfaisant à la condition $n > k + m - 2$; multiplions le polynôme $Q(x)$ par $u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \ldots + u_{n+1} x^n$. Nous obtenons:

$$\begin{aligned}
&(1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k)(u_1 + u_2 x + \\
&+ \ldots + u_{k+m-1} x^{k+m-2} + \ldots + u_{n+1} x^n) = \\
&= [u_1 + (u_2 - a_1 u_1) x + \ldots + \\
&+ (u_{k+m-1} - a_1 u_{k+m-2} - \ldots - a_k u_{m-1}) x^{k+m-2}] + \\
&+ [(u_{k+m} - a_1 u_{k+m-1} - \ldots - a_k u_m) x^{k+m-1} + \\
&+ \ldots + (u_{n+1} - a_1 u_n - \ldots - a_k u_{n-k+1}) x^n] - \\
&- [(a_1 u_{n+1} + \ldots + a_k u_{n-k+2}) x^{n+1} + \ldots \\
&\ldots + a_k a_{n+1} x^{n+k}]. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Ici, dans les premiers crochets se trouve un polynôme de degré non supérieur à $l = k + m - 2$, dont les coeffi-

cients ne dépendent pas du nombre n que nous avons pris; nous le désignons par $P(x)$:

$$P(x) = u_1 + (u_2 - a_1 u_1) x + \\ + \ldots + (u_{k+m-1} - a_1 u_{k+m-2} - \ldots - a_k u_{m-1}) x^{k+m-2}. \quad (25)$$

Dans les crochets suivants se trouve un polynôme dont tous les coefficients sont égaux à zéro, en raison de l'égalité (22). Enfin, les derniers crochets renferment un polynôme dont les coefficients dépendent de n; il ne contient pas de termes de degré inférieur à $n + 1$. En le désignant par $R_n(x)$ transcrivons l'identité (24) sous la forme:

$$P(x) = (1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k) \times \\ \times (u_1 + u_2 x + \ldots + u_{n+1} x^n) + R_n(x). \quad (26)$$

On voit que $u_1 + u_2 x + \ldots + u_{n+1} x^n$ représente le quotient et $R_n(x)$, le reste de la division de $P(x)$ par

$$Q(x) = 1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k,$$

c'est-à-dire que

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots$$

est réellement la suite des coefficients du quotient obtenu par la division du polynôme (25) par (23).

Examinons à titre d'exemple la suite de Fibonacci:

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u_5 = 5, \ldots.$$

Etant donné que ses termes satisfont à la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \geqslant 1),$$

alors $m = 1$, $k = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ et $Q(x) = 1 - x - x^2$.

Le polynôme $P(x)$ doit être d'un degré non supérieur à $k + m - 2 = 1$. D'après la formule (25), nous obtenons:

$$P(x) = 1 + (1 - 1 \cdot 1) x = 1.$$

Donc, les nombres de Fibonacci coïncident avec la suite des coefficients du quotient de la division de 1 par $1 - x - x^2$.

4 Une des questions que l'on a à résoudre dans le cours de l'école secondaire en ce qui concerne les progressions arithmétiques, ainsi que la suite des carrés des nombres naturels, consiste dans la recherche de la somme de n termes de chacune de ces suites.

Soit, d'une façon générale,

$$u_1, \ u_2, \ \ldots, \ u_n, \ \ldots \qquad (27)$$

une suite récurrente d'ordre k dont les termes satisfont à la relation

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \quad (n \geqslant m). \qquad (28)$$

Examinons une nouvelle suite formée par la somme de s_n nombres (27) :

$$s = u_1, \ s_2 = u_1 + u_2, \ \ldots$$
$$\ldots, \ s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ \ldots \qquad (29)$$

et montrons que cette suite de sommes est également récurrente et d'ordre $k + 1$; de plus, ses termes satisfont à la relation

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1) s_{n+k} +$$
$$+ (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \ldots + (a_k - a_{k-1}) s_{n+1} - a_k s_n. \qquad (30)$$

Pour le démontrer, remarquons que

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - u_1 = s_2 - s_1, \ \ldots \\ \ldots, u_n = s_n - (u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) = s_n - s_{n-1}, \ \ldots \end{array}\right\} \qquad (31)$$

En posant $s_0 = 0$ de façon que $u_1 = s_1 - s_0$ et en mettant dans la relation (28) au lieu de $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ leurs expressions par $s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$ nous obtenons:

$$s_{n+k} - s_{n+k-1} = a_1 (s_{n+k-1} - s_{n+k-2}) +$$
$$+ a_2 (s_{n+k-2} - s_{n+k-3}) + \ldots + a_k (s_n - s_{n-1}),$$

d'où

$$s_{n+k} = (1+a_1)\,s_{n+k-1} + \\ + (a_2-a_1)\,s_{n+k-2} + \ldots + (a_k - a_{k-1})\,s_n - a_k s_{n-1} \qquad (n \geqslant m),$$

ou, en remplaçant n par $n+1$:

$$s_{n+k+1} = (1+a_1)\,s_{n+k} + (a_2-a_1)\,s_{n+k-1} + \ldots + \\ + (a_k - a_{k-1})\,s_{n+1} - a_k s_n \qquad (n \geqslant m-1).$$

C'est une relation de récurrence d'ordre $k+1$.

Voici quelques exemples:

a) *Progression géométrique.* Soient $u_n = aq^{n-1}$ et $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1}$. Comme les termes de $\{u_n\}$ satisfont à une relation de la forme $u_{n+1} = qu_n$, les termes de $\{s_n\}$ doivent satisfaire à la relation

$$s_{n+2} = (1+q)\,s_{n+1} - qs_n. \qquad (32)$$

b) *Suite des carrés des nombres naturels.* Soient $u_n = n^2$ et $s_n = 1 + 2^2 + \ldots + n^2$. Comme les termes de $\{u_n\}$ satisfont à la relation

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$$

(voir p. 124), les termes de $\{s_n\}$ satisfont à la relation de la forme :

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n.$$

c) *Nombres de Fibonacci.* Etant donné qu'ils satisfont à la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

les sommes de leurs s_n doivent satisfaire à la relation

$$s_{n+3} = 2s_{n+2} - s_n.$$

5 Dans le cas de suites récurrentes élémentaires, telles que des progressions arithmétiques et géométriques, des suites de carrés ou de cubes des nombres naturels, ainsi que d'une suite périodique, nous pouvons trouver n'importe

quel terme de la suite sans recourir au calcul des termes précédents. Dans le cas de la suite des nombres de Fibonacci ou de la suite générale des coefficients du quotient de la division de deux polynômes, à première vue, nous n'en avons pas la possibilité et pour calculer le treizième nombre de Fibonacci u_{13}, nous devons trouver au préalable l'un après l'autre, tous les termes précédents (au moyen de la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$):

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ u_4 = 3,\ u_5 = 5,\ u_6 = 8,$$
$$u_7 = 13,\ u_8 = 21,\ u_9 = 34,\ u_{10} = 55,\ u_{11} = 89,$$
$$u_{12} = 144,\ u_{13} = 233.$$

Examinons maintenant en détail la structure des termes de la suite récurrente et nous obtiendrons ainsi des formules permettant de calculer, pour le cas le plus général, n'importe quel terme de la suite récurrente sans être obligé de calculer les termes précédents. On pourra considérer ces formules comme des généralisations des formules pour le terme général des progressions arithmétique et géométrique.

Soit

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n \qquad (33)$$

une relation de récurrence d'ordre k. Si elle est remplie pour toutes les valeurs naturelles $n = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient, en posant $n = 1$:

$$u_{k+1} = a_1 u_k + a_2 u_{k-1} + \ldots + a_k u_1.$$

Donc, connaissant $u_1, u_2, \ldots, u_k$ on peut calculer u_{k+1}. En posant ensuite dans la relation (33) $n = 2$, on trouve:

$$u_{k+2} = a_1 u_{k+1} + a_2 u_k + \ldots + a_k u_2.$$

Par conséquent, nous connaissons aussi la valeur u_{k+2}. D'une façon générale, si m est un nombre naturel quelconque et que nous ayons déjà calculé tous les termes de la suite

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_k,\ u_{k+1},\ \ldots,\ u_{m+k-1},$$

en posant dans la relation (33) $n = m$, nous trouvons avec son aide le terme suivant u_{m+k}.

Donc, les termes d'une suite récurrente d'ordre k satisfaisant à la relation (33) sont déterminés d'une façon unique avec cette relation, si l'on connaît les k premiers termes de la suite : $u_1, u_2, \ldots, u_k$. En les choisissant de diverses façons (ce choix n'est pas aucunement borné), on peut obtenir une infinité de suites différentes satisfaisant à la relation (33). Les différences existant entre elles se manifesteront déjà dès les k premiers termes (tout au moins, dans un d'entre eux) et se découvriront aussi dans les termes suivants.

Ainsi, par exemple, la relation de premier ordre

$$u_{n+1} = qu_n$$

est satisfaite par toutes les progressions géométriques possibles de raison q (elles se distinguent entre elles par les valeurs du premier terme u_1) ; la relation de deuxième ordre

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$$

(ou $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$) est satisfaite par toutes les progressions arithmétiques possibles, se distinguant les unes des autres au moins par un des termes $u_1 = a$ et $u_2 = a + d$ et, par conséquent, différant soit par la valeur du premier terme (a), soit par la valeur de la différence (d), soit par l'une et l'autre à la fois.

Examinons encore une relation de deuxième ordre

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Elle est satisfaite, en plus de la suite de Fibonacci :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

caractérisée par le fait qu'ici $u_1 = u_2 = 1$, par une infinité d'autres suites obtenues par choix différent des valeurs de u_1 et u_2. Ainsi, par exemple, pour $u_1 = -3$ et $u_2 = 1$, nous obtenons la suite :

$$-3, 1, -2, -1, -3, -4, -7, -11, -18, -29, \ldots$$

Supposons que nous ayons un nombre quelconque de suites satisfaisant à la même relation (33):

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots, \end{array}\right\} \qquad (34)$$

Les relations suivantes sont alors remplies:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n, \\ y_{n+k} = a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \ldots + a_k y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n+k} = a_1 z_{n+k-1} + a_2 z_{n+k-2} + \ldots + a_k z_n. \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Prenons des nombres A, B, . . ., C quelconques d'après le nombre des suites (34), multiplions tous les termes de la première des relations (35) par A, tous les termes de la seconde par B, . . ., tous les termes de la dernière par C et additionnons. Nous obtenons alors l'égalité:

$$\begin{aligned} Ax_{n+k} + By_{n+k} + \ldots + Cz_{n+k} = \\ = a_1 (Ax_{n+k-1} + By_{n+k-1} + \ldots + Cz_{n+k-1}) + \\ + a_2 (Ax_{n+k-2} + By_{n+k-2} + \ldots + Cz_{n+k-2}) + \\ + \ldots + a_k (Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n). \end{aligned} \qquad (36)$$

Il en découle que la suite

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1, \\ t_2 = Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n = Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (37)$$

obtenue à partir des suites (34) par multiplication de tous les termes de la première par A, de tous les termes de la deuxième par B, . . ., de tous les termes de la dernière

par C et ensuite par l'addition des suites terme à terme (les premiers termes avec les premiers, les deuxièmes avec les deuxièmes, etc.), satisfait à la relation (33) donnée. En choisissant arbitrairement les nombres A, B, . . ., C nous pouvons, en changeant ces nombres, obtenir d'une façon générale différentes valeurs des termes t_1, t_2, t_3, ...

Soit maintenant

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{38}$$

une suite quelconque satisfaisant à la relation (33); on demande s'il n'est pas possible d'attribuer aux nombres A, B, . . ., C des valeurs telles que les k premiers termes de la suite (37) coïncident avec les k premiers termes de la suite (38)? Si cela est possible, d'après ce qui précède, tous les termes des suites (37) et (38) coïncideront aussi, c'est-à-dire que nous aurons pour tout n naturel:

$$u_n = Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n. \tag{39}$$

Ainsi, la possibilité (pour l'instant encore hypothétique) s'offre à nous de représenter *n'importe quelle* suite de l'infinité des suites satisfaisant à la même relation de récurrence d'ordre k par certaines d'entre elles (34), d'après la formule (39). La réalisation de cette possibilité dépendra du fait s'il est possible ou non de choisir les nombres A, B, . . ., C de façon à satisfaire les relations:

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1 = u_1, \\ Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2 = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ax_k + By_k + \ldots + Cz_k = u_k, \end{array}\right\} \tag{40}$$

dont les seconds membres u_1, u_2, . . ., u_k ont des valeurs arbitraires.

Puisque les nombres A, B, . . ., C sont inconnus et le nombre des relations est égal à l'ordre k de la relation de récurrence, il en découle qu'il est rationnel de prendre le nombre des inconnues A, B, . . ., C [il coïncide avec le

nombre des suites (34)] également égal à k. Nous savons que l'existence de solutions d'un système de k équations algébriques (40) avec k inconnues A, B, . . ., C dépend des coefficients de ce système : x_1, y_1, . . ., z_1, . . ., x_k, y_k, . . ., z_k, c'est-à-dire des premiers termes des suites (34). Il y aura sûrement une solution pour des seconds membres u_1, u_2, ..., u_k quelconques, si nous posons, par exemple :

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1, \quad y_1=0, \quad \ldots, z_1=0 ; \\ x_2=0, \quad y_2=1, \quad \ldots, z_2=0 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k=0, \quad y_k=0, \quad \ldots, z_k=1 . \end{array}\right\} \qquad (41)$$

En effet, dans ce cas, le système (40) prend une forme élémentaire qui met immédiatement en évidence la solution du système

$$\left.\begin{array}{l} A=u_1, \\ B=u_2, \\ \ldots\ldots \\ C=u_k . \end{array}\right\}$$

Certes, un autre choix est également possible de nombres

$$x_1, \ldots, z_1, \ldots, x_k, \ldots, z_k,$$

pour lequel le système (40) a une solution, quels que soient les deuxièmes membres des relations. Posons, par exemple,

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1, \quad y_1=1, \quad \ldots, z_1=1 ; \\ x_2=0, \quad y_2=1, \quad \ldots, z_2=1 ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k=0, \quad y_k=0, \quad \ldots, z_k=1 . \end{array}\right\} \qquad (42)$$

Le système prend alors la forme :

$$\left.\begin{array}{r} A+B+\ldots+C=u_1, \\ B+\ldots+C=u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C=u_k, \end{array}\right\}$$

d'où nous obtenons successivement

$$C = u_k, \ldots, B = u_2 - u_3, \quad A = u_1 - u_2.$$

Pour le cas général, formulons le théorème suivant: *Pour qu'un système de k équations algébriques linéaires* (40) *à k inconnues ait une solution A, B, ..., C et une seule pour des valeurs quelconques des deuxièmes membres u_1, u_2, ..., u_k, il faut et il suffit que le système homogène qui lui correspond*:

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1 &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ax_k + By_k + \ldots + Cz_k &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (40')$$

n'ait qu'une seule solution nulle [1]:

$$A = B = \ldots = C = 0.$$

Le lecteur vérifiera aisément que la condition de ce théorème est remplie dans le cas particulier (41) et (42).

---

[1]) La proposition indiquée est commode parce qu'elle n'exige pas, pour son emploi, la connaissance de la théorie des déterminants. Pour le lecteur qui connaît cette théorie, rappelons que, pour que le système (40) ait une solution quelles que soient les valeurs des deuxièmes membres, il faut et il suffit que le déterminant du système

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 y_1 \ldots z_1 \\ x_2 y_2 \ldots z_2 \\ \ldots\ldots \\ x_k y_k \ldots z_k \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. Cette même condition est nécessaire et suffisante pour que la solution du système (40) soit unique pour tous deuxièmes membres fixés (par exemple égaux à zéro). Ainsi, pour un système de k équations linéaires à k inconnues, les conditions d'existence d'une solution pour n'importe quels deuxièmes membres coïncident avec les conditions pour qu'il n'y ait qu'une seule solution pour des deuxièmes membres nuls. C'est précisément ce fait qui est emprimé dans la proposition énoncée dans le texte.

Dans la suite, nous rencontrerons des cas, dans lesquels la proposition énoncée sera utile. Pour l'instant, nous nous appuierons simplement sur ce fait (établi indépendamment de ce dernier théorème) qu'il existe toujours des nombres $x_1, \ldots, z_1, \ldots, x_k, \ldots, z_k$ [premiers termes des suites (34)] tels que le système des relations (40) a des solutions, quels que soient $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Si les nombres de ce genre sont choisis comme premiers termes des suites (34), d'après ce qui précède, toute suite satisfaisant à la relation de récurrence (33) s'exprime d'après la formule (39), où les nombres $A, B, \ldots, C$ sont déterminés par les relations (40). Le système de k suites (34) par lesquelles les termes de toute suite satisfaisant à la relation (33) s'expriment par les formules (39) (c'est-à-dire par multiplication par certains nombres $A, B, \ldots, C$ et addition) s'appelle *base* de la relation de récurrence.

Il découle de ce qui vient d'être énoncé que chaque relation a une base que l'on peut choisir différemment. Par exemple, les systèmes ayant pour premiers termes

$$\left.\underbrace{\begin{matrix} 1, 0, \ldots, 0 \\ 0, 1, \ldots, 0 \\ \ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots, 1 \end{matrix}}_{(k)}\right\} \quad \text{ou} \quad \left.\underbrace{\begin{matrix} 1, 1, \ldots, 1 \\ 0, 1, \ldots, 1 \\ \ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots, 1 \end{matrix}}_{(k)}\right\}$$

forment la base d'une relation de récurrence arbitraire d'ordre k.

Résumons ce qui a été dit au § 5.

Pour toute relation de récurrence d'ordre k il existe une infinité de suites différentes qui la satisfont. Chacune d'elles peut être constituée par k suites satisfaisant cette relation et formant sa base, par multiplication de chacune des k suites respectivement par certains nombres $A, B, \ldots, C$ et leur addition membre à membre.

Ainsi, pour résoudre complètement une relation de récurrence d'ordre k, il suffit de trouver seulement un nombre fini k de suites qui la satisfont et forment la base de cette relation.

Expliquons ce qui vient d'être dit par des exemples.

● EXEMPLE 1. Soit une relation de récurrence de second ordre

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Sa base doit être constituée de deux suites:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots.$$

Nous les choisissons en posant

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1 \text{ et } y_1 = 0,\ y_2 = 1.$$

Etant donné que la relation de récurrence transcrite sous la forme

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n,$$

montre que la différence des termes voisins de la suite est constante, c'est-à-dire que la suite satisfaisant à cette relation est nécessairement une progression arithmétique, dans le cas de la suite $\{x_n\}$ avec, pour premiers termes $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$, nous avons une progression arithmétique avec zéro pour différence, c'est-à-dire:

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots \qquad (x_n = 1),$$

et dans le cas de la suite $\{y_n\}$ avec pour premiers termes $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$, une progression arithmétique avec une différence égale à l'unité, c'est-à-dire:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ \ldots \qquad (y_n = n-1).$$

D'après la formule (39), le terme de toute suite récurrente satisfaisant à cette relation peut être représenté sous la forme:

$$u_n = Ax_n + By_n = A + B(n-1),$$

où A et B doivent être déterminés par les relations:

$$u_1 = A + B(1 - 1),$$
$$u_2 = A + B(2 - 1),$$

c'est-à-dire

$$u_1 = A,$$
$$u_2 = A + B.$$

D'où

$$A = u_1, \; B = u_2 - u_1$$

et, par conséquent,

$$u_n = u_1 + (n - 1)(u_2 - u_1).$$

C'est la formule générale pour tout terme de n'importe quelle suite satisfaisant à la relation

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

En posant $u_1 = a$, $u_2 - u_1 = d$, nous la représentons sous la forme

$$u_n = a + (n - 1) d.$$

C'est la formule connue pour tout terme général d'une progression arithmétique.

● EXEMPLE 2. Examinons une autre relation de récurrence de second ordre:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

En posant $x_1 = 1$ et $x_2 = 1$, nous obtenons la suite de Fibonacci que nous connaissons déjà:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots.$$

En qualité de deuxième suite entrant dans la composition de la base, prenons la suite $\{y_n\}$ pour laquelle $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$. Nous aurons:

$$y_3 = y_2 + y_1 = 1, \quad y_4 = y_3 + y_2 = 2,$$
$$y_5 = y_4 + y_3 = 3, \ldots.$$

Ici $y_2 = x_1$; $y_3 = x_2$; $y_4 = x_3$; $y_5 = x_4$, . . . et d'une manière générale $y_n = x_{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. En effet, si nous avons déjà établi ces égalités pour toutes les valeurs $n \leqslant m + 1$ de façon que, en particulier, $y_{m+1} = x_m$, $y_m = x_{m-1}$, pour y_{m+2} nous aurons :

$$y_{m+2} = y_{m+1} + y_m = x_m + x_{m-1} = x_{m+1},$$

c'est-à-dire les égalités supposées sont justes également pour $n = m + 2$.

Donc,

$$y_n = x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

C'est pourquoi, pour toute suite satisfaisant à la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

nous trouvons, d'après ce qui précède [formule (39)] :

$$u_n = Ax_n + By_n,$$

où A et B sont déterminés par les relations :

$$u_1 = Ax_1 + By_1 = A,$$
$$u_2 = Ax_2 + By_2 = A + B,$$

d'où

$$A = u_1, \quad B = u_2 - u_1$$

et

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1)\, y_n.$$

Pour $n \geqslant 2$, y_n peut être remplacé par x_{n-1}, d'où

$$u_n = u_1 x_n + (u_2 - u_1)\, x_{n-1} \quad (n \geqslant 2),$$

ou

$$u_n = u_1 (x_n - x_{n-1}) + u_2 x_{n-1}.$$

Pour $n \geqslant 3$,

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad \text{ou} \quad x_n - x_{n-1} = x_{n-2}$$

et, par conséquent,

$$u_n = u_1 x_{n-2} + u_2 x_{n-1} \quad (n \geqslant 3).$$

Ainsi, les termes d'une suite quelconque $\{u_n\}$ satisfaisant à la relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

s'expriment par des nombres de Fibonacci d'après la formule que nous avons trouvée. En particulier, si $u_1 = -3$, $u_2 = 1$ (voir p. 132),

$$u_n = -3x_{n-2} + x_{n-1} \quad (n \geqslant 3).$$

6 Nous allons montrer maintenant que dans certaines conditions très générales on peut trouver la base de la relation de récurrence (33)

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n,$$

constituée de k progressions géométriques de raisons diverses. Dans ce but, élucidons dans quelles conditions une certaine progression géométrique

$$x_1 = 1,\ x_2 = q,\ \ldots,\ x_n = q^{n-1},\ \ldots \quad (q \neq 0),$$

satisfait à la relation (33). Remarquons que

$$x_{n+k} = q^{n+k-1}, \quad x_{n+k-1} = q^{n+k-2}, \quad \ldots, \quad x_n = q^{n-1}$$

et posons ces valeurs dans la relation (33) (au lieu de u_{n+k}, u_{n+k-1}, $\ldots$, u_n), nous obtenons:

$$q^{n+k-1} = a_1 q^{n+k-2} + a_2 q^{n+k-3} + \ldots + a_n q^{n-1},$$

d'où

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \ldots + a_k. \tag{43}$$

Ainsi, *une progression géométrique ne peut satisfaire à la relation de récurrence* (33) *d'ordre k que si la raison q de cette progression satisfait à l'équation algébrique* (43) *de degré k avec les mêmes coefficients que dans la relation* (33).

L'équation (43) est l'*échelle de récurrence* de la relation (33). Si $q = \alpha$ est une racine quelconque de l'échelle de récurrence (réelle ou imaginaire), en posant

$$x_n = \alpha^{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{44}$$

nous obtenons une progression géométrique avec pour premier terme $x_1 = 1$ et pour raison α qui satisfait à la relation (33). En effet, par convention, α est une racine de l équation (43), c'est-à-dire

$$\alpha^k = a_1\alpha^{k-1} + a_2\alpha^{k-2} + \ldots + a_k.$$

En multipliant les deux membres par α^{n-1}, où n est un nombre naturel quelconque, nous obtenons:

$$\alpha^{n+k-1} = a_1\alpha^{n+k-2} + a_2\alpha^{n+k-3} + \ldots + a_k\alpha^{n-1},$$

c'est-à-dire que la suite (44) satisfait à la relation (33).

Donc, à chaque racine $q = \alpha$ de l'échelle de récurrence (43) correspond une progression géométrique (44) de raison α qui satisfait à la relation de récurrence (33).

Pour constituer une base uniquement à partir de progressions géométriques de raisons diverses, il faut en avoir une quantité suffisante égale à k et pour ce, il faut avoir k racines *différentes* de l'échelle de récurrence.

Supposons que toutes les racines de l'échelle de récurrence diffèrent les unes des autres

$$q_1 = \alpha, \ q_2 = \beta, \ \ldots, \ q_k = \gamma.$$

Nous obtenons alors k progressions géométriques satisfaisant à la relation (33):

$$\left.\begin{array}{l} 1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \ldots, \\ 1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-1}, \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}, \ldots. \end{array}\right\} \quad (45)$$

Nous allons montrer que le système de suites (45) constitue la base de la relation (33), c'est-à-dire que pour toute suite $\{u_n\}$ satisfaisant à la relation (33), on peut choisir des nombres A, B, ..., C tels que nous aurons pour tout n:

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \ldots + C\gamma^{n-1}. \quad (46)$$

Pour le démontrer, il suffit de vérifier que le système d'équations obtenues à partir de (45) pour $n = 1, 2, \ldots, k$:

$$\left.\begin{aligned} &A+B+\ldots+C=u_1,\\ &A\alpha+B\beta+\ldots+C\gamma=u_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\ldots+C\gamma^{k-1}=u_k \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

a une solution par rapport aux inconnues $A, B, \ldots, C$ pour toutes valeurs des seconds membres de ces équations, et pour cela il suffit à son tour (voir p. 136) que le système homogène correspondant :

$$\left.\begin{aligned} &A+B+\ldots+C=0,\\ &A\alpha+B\beta+\ldots+C\gamma=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\ldots+C\gamma^{k-1}=0 \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

n'admette qu'une seule solution nulle. Or, il en est vraiment ainsi.

En effet, supposons qu'il existe une solution (48) non égale à zéro, c'est-à-dire qu'il existe des nombres $A, B, \ldots, C$, satisfaisant au système (48), dont un au moins, A par exemple, diffère de zéro. Pour écarter cette contradiction, construisons d'abord le polynôme $M(x)$ de degré $k-1$ qui devient nul pour $x = \beta, \ldots, x = \gamma$ et égal à l'unité pour $x = \alpha$. Comme ce polynôme est de degré $k - 1$ et qu'il devient égal à zéro pour $k - 1$ différentes valeurs $(\beta, \ldots, \gamma)$ de x, il doit avoir la forme :

$$M(x) = \mu(x-\beta)\ldots(x-\gamma),$$

où μ est un nombre quelconque. En posant $x = \alpha$, nous devons obtenir $M(\alpha) = 1$, d'où

$$1 = \mu(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma)$$

et

$$\mu = \frac{1}{(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma)}.$$

Donc,

$$M(x) = \frac{(x-\beta)\ldots(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma)};$$

il est évident qu'il satisfait réellement aux conditions posées. Ouvrons les parenthèses et réduisons les termes semblables, nous le représentons sous la forme

$$M(x) = m_0 + m_1x + \ldots + m_{k-1}x^{k-1}.$$

Si, maintenant, nous multiplions la relation (48) par m_0, m_1, . . ., m_{k-1} et si nous additionnons membre à membre, nous obtenons:

$$A(m_0 + m_1\alpha + \ldots + m_{k-1}\alpha^{k-1}) +$$
$$+ B(m_0 + m_1\beta + \ldots + m_{k-1}\beta^{k-1}) + \ldots +$$
$$+ C(m_0 + m_1\gamma + \ldots + m_{k-1}\gamma^{k-1}) = 0,$$

ou

$$AM(\alpha) + BM(\beta) + \ldots + CM(\gamma) = 0.$$

Mais $M(\alpha) = 1$, $M(\beta) = 0$, . . ., $M(\gamma) = 0$ et, par conséquent

$$A = 0,$$

ce qui contredit la supposition faite.

Donc, le système (48) a une seule solution nulle et, par conséquent, le système (47) a une solution (et une seule) pour tout u_1, u_2, . . ., u_k; or, ceci signifie à son tour que le système (45) constitue la base de la relation (33).

Ainsi, nous avons trouvé que, pour toute relation de récurrence

$$u_{n+k} = a_1u_{n+k-1} + \ldots + a_ku_n,$$

pour laquelle l'échelle de récurrence

$$q^k = a_1q^{k-1} + a_2q^{k-2} + \ldots + a_k$$

a différentes racines: $q = \alpha$, $q = \beta$, . . ., $q = \gamma$, il existe une base formée par k progressions géométriques de raisons: α, β, . . ., γ. Autrement dit, pour les termes de toute suite

$\{u_n\}$, satisfaisant à la relation (33), il existe k nombres: A, B, ..., C [on les trouve à partir des relations (47)] tels que

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \ldots + C\gamma^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Résumons ce qui a été dit au § 6.

A une relation de récurrence d'ordre k correspond une équation algébrique de degré k ayant les mêmes coefficients, c'est son échelle de récurrence. Chacune des racines de l'échelle de récurrence est la raison de la progression géométrique satisfaisant à la relation de récurrence donnée. Dans le cas où toutes les racines de l'échelle de récurrence diffèrent les unes des autres, on obtient k progressions géométriques différentes formant la base de la relation de récurrence. Par conséquent, dans ce cas, les termes de n'importe quelle suite satisfaisant à la relation de récurrence peuvent être obtenus en additionnant membre à membre certaines progressions géométriques (au nombre de k).

7 Essayons d'appliquer les résultats obtenus. Commençons par la suite de Fibonacci. Ici, la relation de récurrence est

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n,$$

et, par conséquent, l'échelle de récurrence (43) prend la forme:

$$q^2 = q + 1.$$

En la résolvant, nous obtenons deux racines réelles différentes:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

C'est pourquoi le terme général de la suite de Fibonacci peut s'écrire comme suit:

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

Pour trouver les coefficients A et B inconnus, posons $n = 1$ et $n = 2$; nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 1 = A + B, \\ u_2 &= 1 = A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B). \end{aligned}\right\}$$

La résolution de ce dernier système donne:

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \quad B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

et, par conséquent,

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

ou

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (49)$$

C'est l'expression générale des nombres de Fibonacci. A première vue, la formule trouvée semble encombrante et peu commode pour les calculs. Pourtant, avec son aide, on peut trouver de nombreux résultats curieux. Montrons, par exemple, que la somme des carrés de deux nombres de Fibonacci voisins est également un nombre quelconque de Fibonacci.

En effet,

$$u_n^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2(-1)^n\right],$$

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} - 2(-1)^{n+1}\right];$$

par conséquent,

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right\} = u_{2n+1}.$$

Donc,

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+1}. \qquad (50)$$

Par exemple,

$$u_{13} = u_7^2 + u_6^2 = 13^2 + 8^2 = 233.$$

Ce qui, entre autres, est la réponse au problème de Fibonacci.

Nous proposons au lecteur de démontrer, pour les nombres de Fibonacci, une relation plus générale que (50), soit:

$$u_n u_m + u_{n+1} u_{m+1} = u_{n+m+1}. \qquad (51)$$

En qualité d'autre application de la formule (49) démontrons le théorème suivant:

Soit a et b deux nombres naturels tels que $a < b$; le nombre d'opérations de divisions successives dans l'algorithme d'Euclide alors nécessaire pour trouver le plus grand commun diviseur (p.g.c.d.) de a et b ne dépasse pas le nombre multiplié par 5 de chiffres du nombre a écrit dans le système décimal.

En appliquant à la recherche du p.g.c.d. des nombres b et a l'algorithme d'Euclide, nous trouvons une chaîne d'égalités:

$$\left.\begin{array}{rl} 1) & b = ax' + y', \\ 2) & a = y'x'' + y'', \\ 3) & y' = y''x''' + y''', \\ & \dots\dots\dots \\ k) & y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)}, \\ k+1) & y^{(k-1)} = y^{(k)}x^{(k+1)}. \end{array}\right\} \qquad (52)$$

Ici, les restes successifs satisfont aux inégalités

$$a > y' > y'' > y''' > \dots > y^{(k-1)} > y^{(k)} \geqslant 1.$$

Dans la dernière des égalités (52), le reste est égal à zéro. Par conséquent, le reste précédent $y^{(k)}$ est le p.g.c.d. des nombres b et a. C'est pourquoi k désigne le nombre des opérations nécessaires pour trouver le p.g.c.d. Comme nous

l'avons déjà dit, notre tâche consiste à évaluer le nombre k. A cette fin, nous comparerons les nombres $y^{(k)}$, $y^{(k-1)}$, ..., y', a aux nombres de Fibonacci u_1, u_2, u_3, . . . Remarquons que $y^{(k)} \geqslant 1 = u_2$, mais le reste précédent y^{k-1} est supérieur à $y^{(k)}$ et, par conséquent, $y^{(k-1)} \geqslant 2 = u_3$. C'est pourquoi nous concluons de l'égalité k que

$$y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)} \geqslant y^{(k-1)} \cdot 1 + y^{(k)} \geqslant u_3 + u_2 = u_4.$$

Donc,

$$y^{(k)} \geqslant u_2, \quad y^{(k-1)} \geqslant u_3, \quad y^{(k-2)} \geqslant u_4.$$

Admettons que nous ayons déjà démontré la justesse des inégalités

$$y^{(k)} \geqslant u_2, \ldots, \quad y^{(m)} \geqslant u_{k-m+2},$$
$$y^{(m-1)} \geqslant u_{k-m+3} \quad (m-1 \geqslant 2).$$

Alors nous concluons de l'égalité $y^{(m-2)} = y^{(m-1)}x^{(m)} + y^{(m)}$:

$$y^{(m-2)} \geqslant y^{(m-1)} \cdot 1 + y^{(m)} \geqslant u_{k-m+3} + u_{k-m+2} = u_{k-m+4}.$$

Donc, en poursuivant notre raisonnement, nous parvenons aux inégalités

$$y'' \geqslant u_k, \; y' \geqslant u_{k+1}$$

et, ensuite, de la relation 2) nous déduisons que

$$a = y'x'' + y'' \geqslant y' \cdot 1 + y'' \geqslant u_{k+1} + u_k = u_{k+2}.$$

Mais, d'après la formule (49), u_{k+2} prend la forme suivante

$$u_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

C'est pourquoi

$$a \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right] >$$
$$> \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - 1\right] \qquad (53)$$

(étant donné que $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1$ et, par conséquent $\left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^{k+2} <$ < 1).

De (53) nous obtenons que

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} < a\sqrt{5}+1 < \sqrt{5}\,(a+1) < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 (a+1)$$

$\left(\sqrt{5} < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right.$, étant donné que $\left.\sqrt{5} < 3\right)$.

C'est pourquoi

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k < a+1. \qquad (54)$$

Remarquons maintenant que

$$u_5 = 5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right] < \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + 1\right],$$

d'où

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 > 5\sqrt{5}-1 > 10.$$

Par conséquent,

$$10^k < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5k} < (a+1)^5. \qquad (55)$$

Si un nombre a s'écrit dans le système décimal au moyen de n chiffres, il est évident que

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^n,$$

d'où

$$a + 1 \leqslant 10^n,$$

et, par conséquent, en raison de l'inégalité (55),

$$10^k < (a + 1)^5 \leqslant 10^{5n},$$

ou

$$k < 5n. \qquad (56)$$

C'est le résultat cherché : le nombre k de divisions successives dans l'algorithme d'Euclide est plus petit que le nombre multiplié par 5 de chiffres du plus petit des nombres b et a, écrit dans le système décimal. La démonstration ci-dessus montre que le cas le moins favorable pour appliquer l'algorithme d'Euclide (en raison du nombre considérable d'opérations, voisin de la limite établie dans le théorème) se présentera quand a et b seront des nombres de Fibonacci voisins. Pour le confirmer, prenons par exemple, $b = u_{20} = 6765$ et $a = u_{19} = 4181$. Ici a est un nombre à 4 chiffres et, par conséquent, d'après le théorème démontré, le nombre d'opérations dans l'algorithme d'Euclide doit être inférieur à $5 \cdot 4 = 20$. En réalité, nous obtenons ici $k = 17$ opérations. En effet,

1) $6765 = 4181 \cdot 1 + 2584$,
2) $4181 = 2584 \cdot 1 + 1597$,
3) $2584 = 1597 \cdot 1 + 987$,
4) $1597 = 987 \cdot 1 + 610$,
5) $987 = 610 \cdot 1 + 377$,
6) $610 = 377 \cdot 1 + 233$,
7) $377 = 233 \cdot 1 + 144$,
8) $233 = 144 \cdot 1 + 89$,
9) $144 = 89 \cdot 1 + 55$,
10) $89 = 55 \cdot 1 + 34$,
11) $55 = 34 \cdot 1 + 21$,
12) $34 = 21 \cdot 1 + 13$,
13) $21 = 13 \cdot 1 + 8$,
14) $13 = 8 \cdot 1 + 5$,
15) $8 = 5 \cdot 1 + 3$,
16) $5 = 3 \cdot 1 + 2$,
17) $3 = 2 \cdot 1 + 1$,
18) $2 = 1 \cdot 2 + 0$.

On obtient ici comme restes des nombres de Fibonacci se succédant en ordre décroissant. Tous les quotients (excepté le dernier) sont égaux à l'unité, ce qui explique le grand nombre des opérations. Le p.g.c.d. s'est avéré égal à l'unité (égalité 17), ce qu'on pouvait prévoir d'emblée pour des nombres de Fibonacci voisins. Effectivement, du fait que $u_{n+2} = u_{n+1} = u_n$, il découle que le p.g.c.d. des nombres

u_{n+2} et u_{n+1} coïncide avec le p.g.c.d. de u_{n+1} et u_n. C'est pourquoi, chaque paire de nombres de Fibonacci voisins a un seul et même p.g.c.d. Pour le trouver, il suffit de considérer la paire $u_2 = u_1 = 1$, d'où il s'ensuit qu'il est égal à l'unité.

8 Considérons maintenant comme exemple la série périodique (16):

$$u_1 = 5,\ u_2 = 7,\ u_3 = 1,\ u_4 = 3,\ u_5 = 2,\ u_6 = 1,\ u_7 = 3,\ \ldots$$

Ici, la relation de récurrence prend la forme:

$$u_{n+3} = u_n \quad (n \geqslant 3)$$

et, par conséquent, l'échelle de récurrence est:

$$q^3 = 1.$$

Cette relation a les racines suivantes:

$$\alpha = 1, \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \gamma = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

C'est pourquoi, il convient de chercher le terme général de la suite [voir formule (46)] sous la forme:

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + C\gamma^{n-1} =$$
$$= A + B\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + C\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}.$$

Nous pouvons exiger que cette formule soit remplie pour toutes les valeurs n pour lesquelles est également remplie la relation de récurrence: $n = 3, 4, 5, \ldots$

Remarquons que

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

c'est pourquoi, d'après la formule de Moivre:

$$u_n=A+B\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+C\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}=$$

$$=A+(-1)^{n-1}B\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1)-i\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\right]+$$

$$+(-1)^{n-1}C\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+i\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\right]=$$

$$=A+(B+C)(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+$$

$$+i(-B+C)(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{3}(n-1).$$

Posons $B+C=A_1$ et $i(-B+C)=A_2$; cette formule prend alors la forme suivante:

$$u_n=A+A_1(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1)+$$

$$+A_2(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{3}(n-1)$$

$$(n\geqslant 3),$$

et il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients inconnus A, A_1 et A_2. En posant $n=3$, $n=4$ et $n=5$, nous obtenons trois équations à trois inconnues:

$$u_3=1=A+A_1\cos\frac{2\pi}{3}+A_2\sin\frac{2\pi}{3}=A-\frac{1}{2}A_1+\frac{\sqrt{3}}{2}A_2,$$

$$u_4=3=A-A_1\cos\frac{3\pi}{3}-A_2\sin\frac{3\pi}{3}=A+A_1,$$

$$u_5=2=A+A_1\cos\frac{4\pi}{3}+A_2\sin\frac{4\pi}{3}=A-\frac{1}{2}A_1-\frac{\sqrt{3}}{2}A_2.$$

D'où nous trouvons:

$$A = 2, \quad A_1 = 1 \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc,

$$u_n = 2 + (-1)^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right] =$$

$$= 2 + (-1)^n \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n-2)\frac{\pi}{3} \quad (n \geqslant 3).$$

Nous voyons que le terme général de la suite s'exprime, dans cet exemple, par des fonctions trigonométriques, ce qui concorde bien avec la périodicité de la série.

Examinons, enfin, un exemple se rapportant directement à la division des polynômes.

Soit deux polynômes $P(x) = 3 + x^2 - x^5$ et $Q(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3$; il s'agit de définir la structure des coefficients du quotient, obtenus par la division de $P(x)$ par $Q(x)$. La suite des coefficients du quotient

$$u_1 = D_0, \ u_2 = D_1, \ \ldots, \ u_n = D_{n-1}, \ \ldots,$$

comme nous l'avons vu au § 2, est une suite récurrente dont les termes satisfont à la relation (20):

$$D_{n+k} = -\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1} - \ldots - \frac{B_k}{B_0}D_n \quad (n \geqslant l - k + 1).$$

Ici k est le degré de $Q(x)$; $B_0, B_1, \ldots, B_k$, les coefficients de $Q(x)$ et l, le degré de $P(x)$.

Par conséquent, $k = 3$, $B_0 = 2$, $B_1 = -1$, $B_2 = -2$, $B_3 = 1$, $l = 5$

$$D_{n+3} = \frac{1}{2}D_{n+2} + \frac{2}{2}D_{n+1} - \frac{1}{2}D_n \quad (n \geqslant 5 - 3 + 1 = 3),$$

c'est-à-dire

$$D_{n+3} = \frac{1}{2} D_{n+2} + D_{n+1} - \frac{1}{2} D_n \qquad (n \geqslant 3).$$

L'échelle de récurrence prend la forme:

$$q^3 = \frac{1}{2} q^2 + q - \frac{1}{2}$$

ou

$$q^3 - q - \frac{1}{2}(q^2 - 1) = \left(q - \frac{1}{2}\right)(q-1)(q+1) = 0.$$

C'est pourquoi ses racines sont

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -1,$$

et nous obtenons pour D_n la formule:

$$D_n = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \cdot 1^n + C(-1)^n \qquad (n \geqslant 3).$$

Posons $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$; nous obtenons les relations:

$$D_3 = \frac{1}{8} A + B - C,$$

$$D_4 = \frac{1}{16} A + B + C,$$

$$D_5 = \frac{1}{32} A + B - C.$$

Ici sont inconnus non seulement les coefficients A, B et C, mais aussi les nombres D_3, D_4, D_5. Pour les définir effectuons réellement la division de $P(x)$ par $Q(x)$ de façon à obtenir dans le quotient les termes jusqu'à la cinquième

puissance inclusivement. Nous obtenons:

$$
\begin{array}{l|l}
3+x^2-x^5 & 2-x-2x^2+x^3 \\
\hline
-\left(3-\frac{3}{2}x-3x^2+\frac{3}{2}x^3\right) & \frac{3}{2}+\frac{3}{4}x+2\frac{3}{8}x^2+1\frac{3}{16}x^3+2\frac{19}{32}x^4 \\
\hline
\quad \frac{3}{2}x+4x^2-\frac{3}{2}x^3-x^5 & \\
\quad -\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{4}x^4\right) & \\
\hline
\qquad 4\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}x^4-x^5 & \\
\qquad -\left(4\frac{3}{4}x^2-2\frac{3}{8}x^3-4\frac{3}{4}x^4+2\frac{3}{8}x^5\right) & \\
\hline
\qquad\quad 2\frac{3}{8}x^3+4x^4-3\frac{3}{8}x^5 & \\
\qquad\quad -\left(2\frac{3}{8}x^3-1\frac{3}{16}x^4-2\frac{3}{8}x^5+1\frac{3}{16}x^6\right) & \\
\hline
\qquad\qquad 5\frac{3}{16}x^4-x^5-1\frac{3}{16}x^6 & \\
\qquad\qquad -\left(5\frac{3}{16}x^4-2\frac{19}{32}x^5-5\frac{3}{16}x^6+2\frac{19}{32}x^7\right) & \\
\hline
\qquad\qquad\quad 1\frac{19}{32}x^5+4x^6-2\frac{19}{32}x^7 &
\end{array}
$$

D'où

$$D_0=\frac{3}{2},\quad D_1=\frac{3}{4},\quad D_2=2\frac{3}{8},\quad D_3=1\frac{3}{16},\quad D_4=2\frac{19}{32},\quad D_5=\frac{51}{64}.$$

Par conséquent, le système d'équations obtenu plus haut prend la forme:

$$\frac{1}{8}A+B-C=1\frac{3}{16},$$

$$\frac{1}{16}A+B+C=2\frac{19}{32},$$

$$\frac{1}{32}A+B-C=\frac{51}{64},$$

d'où nous trouvons

$$A = 4\frac{1}{6}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = \frac{5}{6}.$$

Donc

$$D_n = 4\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2} + \frac{5}{6}(-1)^n \quad (n \geqslant 3).$$

Notre problème est résolu. Avec la formule trouvée, nous obtenons :

$$D_6 = 2\frac{51}{128}, \quad D_7 = \frac{179}{256}, \quad D_8 = 2\frac{179}{512}, \ldots$$

9 Dans tous les exemples étudiés plus haut, l'échelle de récurrence n'avait que des racines simples. Examinons toutefois l'exemple de la suite des sommes de carrés de nombres naturels cité à la page 130. Pour cette suite, la relation de récurrence prend la forme :

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n,$$

et, par conséquent, l'échelle de récurrence est

$$q^4 = 4q^3 - 6q^2 + 4q - 1,$$

ou

$$q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 4q + 1 = (q-1)^4 = 0.$$

Elle possède une seule racine d'ordre de multiplicité 4, $q = 1$; c'est pourquoi nous obtenons ici une seule progression géométrique de raison 1, dont les termes satisfont à la relation de récurrence donnée.

Dans de tels cas, il faut chercher d'autres suites récurrentes fondamentales pouvant constituer, avec la progression géométrique indiquée, la base de la relation donnée. Dans notre exemple,

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ \ldots;$$

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ (n-1)^2,\ \ldots;$$

$$0,\ 1,\ 8,\ 27,\ \ldots,\ (n-1)^3,\ \ldots$$

seront de telles suites (comme le lecteur peut aisément le vérifier lui-même). Sans examiner le cas le plus général, qui exige de laborieux calculs, nous nous arrêterons à l'exemple typique suivant.

Supposons que nous ayons la relation de récurrence:

$$u_{n+k} = C_k^{k-1}\alpha u_{n+k-1} - C_k^{k-2}\alpha^2 u_{n+k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^0 \alpha^k u_n, \tag{57}$$

où C_k^{k-1}, C_k^{k-2}, ..., C_k^0 sont des coefficients binomiaux d'ordre k. L'échelle de récurrence correspondante

$$q^k = C_k^{k-1}\alpha q^{k-1} - C_k^{k-2}\alpha^2 q^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1}\alpha^k C_k^0$$

peut être représentée sous la forme

$$(q-\alpha)^k = 0.$$

Elle a une racine $q = \alpha$ d'ordre de multiplicité k; il est évident que

$$(\alpha-\alpha)^k = \alpha^k - C_k^{k-1}\alpha^k + C_k^{k-2}\alpha^k - \ldots + (-1)^k C_k^0 \alpha^k = 0. \tag{58}$$

Examinons d'une manière générale les identités suivantes:

$$(\alpha-\alpha)^{k-m} = \alpha^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1}\alpha^{k-m} + \\ + C_{k-m}^{k-m-2}\alpha^{k-m} - \ldots + (-1)^{k-m} C_{k-m}^0 \alpha^{k-m} = 0,$$

où $m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, ou

$$(1-1)^{k-m} = C_{k-m}^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1} + C_{k-m}^{k-m-2} - \ldots + \\ + (-1)^{\mu} C_{k-m}^{k-m-\mu} + \ldots + (-1)^{k-m} C_{k-m}^0 = 0. \tag{59}$$

L'égalité (59), correspondant à la valeur $m = 0$, prend la forme:

$$C_k^k - C_k^{k-1} + C_k^{k-2} - \ldots + (-1)^{\mu} C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k C_k^0 = 0. \tag{59'}$$

Remarquons que

$$C_k^{k-\mu}=\frac{k(k-1)\dots(\mu+1)}{1\cdot 2\cdot\dots(k-\mu)}=\frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{(k-m-\mu+1)\dots(k-\mu)}C_{k-m}^{k-m-\mu}$$

$$(m=1,\ 2,\ \dots,\ k-1;\ 0\leqslant\mu\leqslant k-m),$$

ou

$$k(k-1)\dots(k-m+1)\,C_{k-m}^{k-m-\mu}=$$
$$=(k-m-\mu+1)\dots(k-\mu)\,C_k^{k-\mu},\qquad (60)$$

et multiplions chacune des égalités (59) ($m=1,\ 2,\ \dots$ $\dots,\ k-1$) par le facteur correspondant $k(k-1)\dots$ $\dots(k-m+1)$, après cela, en nous servant de (60), nous les écrivons sous la forme:

$$(k-m+1)\dots kC_k^k-(k-m)\dots(k-1)_k^{k-1}+\dots+$$
$$+(-1)^{\mu}(k-m-\mu+1)\dots(k-\mu)\,C_k^{k-\mu}+\dots+$$
$$+(-1)^{k-m}1\cdot 2\dots mC_k^0=0$$
$$(m=1,\ 2,\ \dots,\ k-1).\qquad (59'')$$

Démontrons maintenant que pour $m=0,\ 1,\ 2,\ \dots$ $\dots,\ k-1$ les égalités suivantes sont vraies:

$$k^mC_k^k-(k-1)^mC_k^{k-1}+\dots+(-1)^{\mu}(k-\mu)^mC_k^{k-\mu}+$$
$$+\dots+(-1)^k\cdot 0^mC_k^0=0.\qquad (61)$$

En effet, l'égalité correspondant à $m=0$ coïncide avec (59′) et, par conséquent, elle est vraie.

Raisonnant par induction, admettons que les égalités (61) sont déjà démontrées pour $m=0,\ 1,\ \dots,\ j$ ($j\leqslant k-2$) et démontrons alors que l'égalité correspondant à $m=$ $=j+1$ est également vraie. A cette fin, introduisons le polynôme de degré $j+1$:

$$f(x)=(x-j)(x-j+1)\dots(x-1)\,x=x^{j+1}-\beta_jx^j-\dots-\beta_1x.\qquad (62)$$

En multipliant es égalités (61), pour $m = 1, 2, \ldots, j$ respectivement par les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$, nous obtenons:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 k C_k^k - \beta_1 (k-1) C_k^{k-1} + \\ + \ldots + \beta_1 (-1)^\mu (k-\mu) C_k^{k-\mu} + \\ + \ldots + \beta_1 (-1)^k \cdot 0 \cdot C_k^0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_j k^j C_k^k - \beta_j (k-1)^j C_k^{k-1} + \\ + \ldots + \beta_j (-1)^\mu (k-\mu)^j C_k^{k-\mu} + \\ + \ldots + \beta_j (-1)^k \cdot 0 \cdot C_k^0 = 0. \end{array}\right\} \quad (63)$$

Ecrivons encore l'égalité (59″) correspondant à la valeur $m = j + 1$ sous la forme

$$f(k) C_k^k - f(k-1) C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu f(k-\mu) C_k^{k-\mu} + \\ + \ldots + (-1)^k f(0) C_k^0 = 0 \quad (64)$$

[nous avons u ilisé ici le fait que $(k - j) \ldots k = f(k)$, $(k - j - 1) \ldots (k - 1) = f(k - 1), \ldots (k - \mu - j) \ldots$ $\ldots (k - \mu) = f(k - \mu), \ldots$].

En additionnant (63) et (64) membre à membre, nous aurons:

$$[\beta_1 k + \ldots + \beta_j k^j + f(k)] C_k^k - \\ - [\beta_1 (k-1) \ldots + \beta_j (k-1)^j + f(k-1)] C_k^{k-1} + \ldots + \\ + (-1)^\mu [\beta_1 (k-\mu) + \ldots + \beta_j (k-\mu)^j + f(k-\mu)] C_k^{k-\mu} + \\ + \ldots + (-1)^k [\beta_1 \cdot 0 + \ldots + \beta_j \cdot 0^j + f(0)] C_k^0 = 0.$$

Mais en vertu de (62)

$$\beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_j x^j + f(x) = x^{j+1}.$$

C'est pourquoi le résultat obtenu prend la forme:

$$k^{j+1} C_k^k - (k-1)^{j+1} C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu (k-\mu)^{j+1} C_k^{k-\mu} + \\ + \ldots + (-1)^k \cdot 0^{j+1} C_k^0 = 0.$$

C'est l'égalité (61) pour $m = j + 1$. Ainsi, la démonstration de la justesse des relations (61) est terminée.

Considérons finalement un polynôme quelconque de degré non supérieur à $k - 1$:

$$P(x) = A_{k-1}x^{k-1} + A_{k-2}x^{k-2} + \ldots + A_0. \qquad (65)$$

En multipliant (61), pour $m = 0, 1, 2, \ldots, k - 1$ respectivement par $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$, nous obtenons:

$$A_0C_k^k - A_0C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu A_0C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k A_0C_k^0 = 0,$$

$$A_1kC_k^k - A_1(k-1)C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^\mu A_1(k-\mu)C_k^{k-\mu} + \ldots + \\ + (-1)^k A_1 \cdot 0 \cdot C_k^0 = 0,$$

$$A_{k-1}k^{k-1}C_k^k - A_{k-1}(k-1)^{k-1}C_k^{k-1} + \ldots + \\ + (-1)^\mu A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k A_{k-1} \cdot 0^{k-1} \cdot C_k^0 = 0.$$

En les additionnant membre à membre nous aurons:

$$(A_0 + A_1k + \ldots + A_{k-1}k^{k-1})C_k^k - \\ - [A_0 + A_1(k-1) + \ldots + A_{k-1}(k-1)^{k-1}]C_k^{k-1} + \ldots + \\ + (-1)^\mu [A_0 + A_1(k-\mu) + \ldots \\ \ldots + A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}]C_k^{k-\mu} + \ldots + (-1)^k [A_0 + A_1 \cdot 0 + \ldots \\ \ldots + A_{k-1} \cdot 0^{k-1}]C_k^0 = 0,$$

ou

$$P(k) \cdot C_k^k - P(k-1) \cdot C_k^{k-1} + \ldots + (-1)^k P(0) \cdot C_k^0 = 0. \qquad (66)$$

Par conséquent, le polynôme quelconque $P(x)$ de degré non supérieur à $k - 1$ satisfait à la relation (66).

Posons, en particulier, $P(x) = (x + n - 1)^m$ où n est un nombre naturel quelconque et m un entier, tel que $0 \leqslant m \leqslant k - 1$. L'égalité (66) prend alors la forme:

$$(k + n - 1)^m C_k^k - (k + n - 2)^m C_k^{k-1} + \ldots + \\ + (-1)^k (n-1)^m C_k^0 = 0,$$

ou, en multipliant par α^{k+n-1} et en substituant 1 à C_k^k:

$$(k+n-1)^m\alpha^{k+n-1} - C_k^{k-1}\alpha(k+n-2)^m\alpha^{k+n-2} - \\ - C_k^{k-2}\alpha^2(k+n-3)^m\alpha^{k+n-3} + \ldots + \\ + (-1)^{k-1}C_k^0\alpha^k(n-1)^m\alpha^{n-1}. \quad (67)$$

En comparant (67) et (57), nous concluons que la relation de récurrence (57) est satisfaite par chacune des k suites:

$$\left.\begin{array}{llllll} 1, & \alpha, & \alpha^2, & \ldots, & \alpha^{n-1}, \ldots, & (m=0); \\ 0, & \alpha, & 2\alpha^2, & \ldots, & (n-1)\alpha^{n-1}, \ldots, & (m=1); \\ 0, & \alpha, & 2^2\alpha^2, & \ldots, & (n-1)^2\alpha^{n-1}, \ldots, & (m=2); \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0, & \alpha, & 2^{k-1}\alpha^2, & \ldots, & (n-1)^{k-1}\alpha^{n-1}, \ldots, & (m=k-1). \end{array}\right\} \quad (68)$$

Si nous constatons qu'elles forment une base, il en découlera que le terme général d'une suite quelconque satisfaisant à la relation (57) a la forme:

$$u_n = [B_0 + B_1(n-1) + \ldots + B_{k-1}(n-1)^{k-1}]\,\alpha^{n-1} = \\ = Q(n-1)\,\alpha^{n-1}, \quad (69)$$

où $Q(x) = B_0 + B_1x + \ldots + B_{k-1}x^{k-1}$, est un polynôme de degré non supérieur à $k-1$, avec des coefficients arbitraires.

Il suffit de démontrer qu'un système de k équations linéaires

$$B_0 + B_1\cdot 0 + \ldots + B_{k-1}\cdot 0^{k-1} = u_1, \\ B_0 + B_1\cdot 1 + \ldots + B_{k-1}\cdot 1^{k-1} = u_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B_0 + B_1(k-1) + \ldots + B_{k-1}(k-1)^{k-1} = u_k$$

a une solution par rapport aux inconnues $B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$ pour tous $u_1, \ldots, u_k$, c'est-à-dire (en vertu de la proposi-

tion de la p. 136), que le système

$$B_0 = 0,$$
$$B_0 + B_1 + \dots + B_{k-1} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$B_0 + (k-1) B_1 + \dots + (k-1)^{k-1} B_{k-1} = 0$$

a une seule solution nulle. Mais les équations du dernier système signifient que

$$Q(0) = Q(1) = \dots = Q(k-1) = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation

$$B_0 + B_1 (x) + \dots + B_{k-1} x^{k-1} = 0$$

de degré non supérieur à $k - 1$ a, au moins, k racines différentes: 0, 1, 2, . . ., $k - 1$. Il en découle que

$$B_0 = B_1 = \dots = B_{k-1} = 0,$$

ce qui achève la démonstration de ce que les suites (68) forment une base de suites récurrentes satisfaisant à la relation (57).

Dans le cas d'une suite récurrente quelconque satisfaisant à la relation générale

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \dots + a_k u_n \ (a_k \neq 0), \quad (70)$$

l'échelle de récurrence

$$q^k = a_1 q^{k-1} + \dots + a_k \quad (71)$$

peut avoir une certaine racine α d'ordre de multiplicité a, une racine β d'ordre de multiplicité b, . . ., une racine γ d'ordre de multiplicité c et en tout $a + b + \dots + c = k$ racines.

Pour ce cas, qui est le plus général, on peut démontrer que la base est constituée par les k suites suivantes:

$$1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \dots,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$0, \alpha, 2^{a-1}\alpha^2, \dots, (n-1)^{a-1}\alpha^{n-1}, \dots;$$

$$1,\ \beta,\ \beta^2,\ \ldots,\ \beta^{n-1},\ \ldots,$$

. . . .

$$0,\ \beta,\ 2^{b-1}\beta^2,\ \ldots,\ (n-1)^{b-1}\beta^{n-1},\ \ldots;$$

. . . .

$$1,\ \gamma,\ \gamma^2,\ \ldots,\ \gamma^{n-1},\ \ldots,$$

. . . .

$$0,\ \gamma,\ 2^{c-1}\gamma^2,\ \ldots,\ (n-1)^{c-1}\gamma^{n-1},\ \ldots$$

C'est pourquoi

$$u_n = Q(n-1)\,\alpha^{n-1} + R(n-1)\,\beta^{n-1} + \ldots + S(n-1)\,\gamma^{n-1}, \tag{72}$$

où $Q(x)$, $R(x)$, . . ., $S(x)$ sont des polynômes fixés quelconques, de degrés respectivement non supérieurs à $a-1$, $b-1$, . . ., $c-1$.

Donc, *le terme général* u_n *de toute suite récurrente a la forme d'une somme de produits de polynômes par rapport à* $n-1$ (ou ce qui revient au même, par rapport à n) *par les termes généraux de progressions géométriques, dont les raisons sont égales aux racines de l'échelle de récurrence* (71).

Au cas où toutes les racines de ces dernières sont simples, lesdits polynômes sont constants et le terme général de la suite récurrente prend la forme de la somme des termes de progressions géométriques.

On peut démontrer aussi la justesse de la proposition contraire, c'est-à-dire, *toute suite* $\{u_n\}$ *dont le terme général s'exprime par la formule* (72) *est récurrente*. L'échelle de récurrence correspondante (71) est construite d'après ses racines α, β, . . ., γ et par leur ordre de multiplicité a, b, . . ., c (représentant les degrés des polynômes Q, R, ..., S, augmentés d'une unité). D'où l'on trouve immédiatement la relation de récurrence (70).

Voyons à titre d'exemple la suite

$$u_n = (n-1)^2 \cdot 2^{n-1} + 3^{n-1}.$$

En la comparant à (72), nous concluons que les racines de l'échelle de récurrence sont: $\alpha = 2$, $\beta = 3$, de plus l'ordre

de multiplicité a est égal à $2 + 1 = 3$. Donc, l échelle de récurrence doit avoir la forme :

$$(q - 2)^3 (q - 3) = q^4 - 9q^3 + 30q^2 - 44q + 24 = 0,$$

et la relation de récurrence doit s'écrire :

$$u_{n+4} = 9u_{n+3} - 30u_{n+2} + 44u_{n+1} - 24u_n.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la suite donnée qui satisfait à la dernière relation.

10 Illustrons les résultats du § 9 par plusieurs exemples. Nous avons vu au § 2 que les termes d'une progression arithmétique satisfont à la relation de type :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n,$$

les carrés des nombres naturels à la relation

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n,$$

les cubes à la relation

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n.$$

Il est évident que toutes ces relations sont contenues comme cas particuliers dans la relation :

$$u_{n+k} = C_k^{k-1} u_{n+k-1} - C_k^{k-2} u_{n+k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^0 u_n, \qquad (57')$$

examinée au § 9 (ici $\alpha = 1$).

Le terme général de toute suite satisfaisant à cette relation doit avoir la forme [formule (69)] :

$$u_n = B_0 + B_1 (n-1) + \ldots + B_{k-1} (n-1)^{k-1}. \qquad (69')$$

Pour trouver les coefficients B_0, B_1, . . ., B_{k-1} il suffit de résoudre le système suivant de k équations algébriques linéaires à k inconnues

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= u_1, \\ B_0 + B_1 + \ldots + B_{k-1} &= u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_0 + B_1 (k-1) + \ldots + B_{k-1} (k-1)^{k-1} &= u_k. \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

Dans le cas d'une progression arithmétique $k = 2$ et la formule (69') devient

$$u_n = B_0 + B_1 (n - 1),$$

et le système (73) prend la forme:

$$B_0 = u_1,$$
$$B_0 + B_1 = u_2.$$

Il en découle que $B_0 = u_1$ est le premier terme de la progression et $B_1 = u_2 - u_1 = d$, la différence de la progression. Par conséquent,

$$u_n = u_1 + d (n - 1).$$

Nous avons obtenu une formule bien connue.

Il n'est pas nécessaire de faire les calculs correspondants pour le cas d'une suite de carrés ou de cubes de nombres naturels, car nous savons, dès le début même, qu'ici $u_n = n^2$, ou $u_n = n^3$. Toutefois, l'application des relations (69') et (73) à la déduction de formules pour la somme des termes d'une progression arithmétique, ainsi que pour la somme des carrés ou des cubes, présente aussi un certain intérêt.

Au § 4, nous avons démontré que si les termes d'une certaine suite $\{u_n\}$ satisfont à une relation de la forme:

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n,$$

les sommes $\{s_n\}$ des termes de cette suite ($s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2$, $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$, ...) satisfont à la relation de la forme:

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1) s_{n+k} + (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \ldots + (a_k - a_{k-1}) s_{n+1} - a_k s_n.$$

Dans le cas de la relation (57'), il est évident que

$$a_1 = C_k^1, \quad a_2 = -C_k^2, \ldots, a_k = (-1)^{k-1} C_k^k.$$

C'est pourquoi

$$1+a_1=1+C_k^1=C_{k+1}^1,$$
$$a_2-a_1=-(C_k^2+C_k^1)=-C_{k+1}^2,$$
$$a_3-a_2=C_k^3+C_k^2=C_{k+1}^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_k-a_{k-1}=(-1)^{k-1}(C_k^k+C_k^{k-1})=(-1)^{k-1}C_{k+1}^k,$$
$$-a_k=(-1)^kC_k^k=(-1)^kC_{k+1}^{k+1},$$

et la relation pour $\{s_n\}$ peut être présentée sous la forme:

$$s_{n+k+1}=C_{k+1}^1s_{n+k}-C_{k+1}^2s_{n+k-1}+\ldots+(-1)^kC_{k+1}^{k+1}s_n,$$

ou

$$s_{n+k+1}-C_{k+1}^1s_{n+k}+C_{k+1}^2s_{n+k-1}-\ldots+(-1)^{k+1}C_{k+1}^{k+1}s_n=0.$$

Donc, si une suite $\{u_n\}$ satisfait à une relation de la forme (57′) d'ordre k, la suite des sommes correspondantes $\{s_n\}$ satisfait à une relation de même forme, mais d'ordre $k+1$. En particulier, pour une progression arithmétique $k=2$, pour la suite des carrés des nombres naturels $k=3$, pour la suite des cubes, $k=4$: par conséquent, pour les suites des sommes correspondantes, dans les égalités indiquées plus haut (57′), (69′), (73), il faut prendre k plus grand d'une unité: 3, 4, 5.

a) *Somme des termes d'une progression arithmétique.* Sur la base des remarques faites, s_n s'exprime par la formule (69′) (en substituant s_n à u_n) pour $k=3$. Par conséquent,

$$s_n=B_0+B_1(n-1)+B_2(n-1)^2.$$

Les coefficients B_0, B_1, B_2 sont déterminés par le système (73) (avec la même substitution de s_n à u_n et pour $k=3$):

$$B_0=s_1=u_1,$$
$$B_0+B_1+B_2=s_2=u_1+u_2=2u_1+d,$$
$$B_0+2B_1+2^2B_2=s_3=u_1+u_2+u_3=3u_1+3d.$$

En le résolvant, nous obtenons:

$$B_0 = u_1, \quad B_1 = u_1 + \frac{1}{2} d, \quad B_2 = \frac{1}{2} d.$$

Par conséquent,

$$s_n = u_1 + \left(u_1 + \frac{1}{2} d\right)(n-1) + \frac{1}{2} d (n-1)^2 =$$

$$= nu_1 + \frac{1}{2} d (n-1) n = \frac{n [2u_1 + (n-1) d]}{2} =$$

$$= \frac{n [u_1 + u_1 + (n-1) d]}{2} = \frac{n (u_1 + u_n)}{2}.$$

b) *Somme des carrés des nombres naturels.* En prenant dans les formules (69′) et (73) $k = 4$ et en substituant s_n à u_n, nous obtenons:

$$s_n = B_0 + B_1 (n-1) + B_2 (n-1)^2 + B_3 (n-1)^3$$

et

$$B_0 = s_1 = 1,$$

$$B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = s_2 = 1 + 2^2 = 5,$$

$$B_0 + 2B_1 + 4B_2 + 8B_3 = s_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14,$$

$$B_0 = 3B_1 + 9B_2 + 27B_3 = s_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

Nous tirons du dernier système:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = 2\frac{1}{6}, \quad B_2 = 1\frac{1}{2}, \quad B_3 = \frac{1}{3}.$$

C'est pourquoi

$$s_n = 1 + \frac{13}{6}(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{3}(n-1)^3 =$$

$$= \frac{1}{6} n + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{3} n^3 = \frac{n (1 + 3n + 2n^2)}{6} = \frac{n (n+1)(2n+1)}{6}.$$

Nous avons obtenu la formule connue.

c) *Somme des cubes des nombres naturels.* Pour elle, nous avons

$$s_n = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}.$$

Nous proposons au lecteur de faire cette déduction en guise d'exercice.

Pour terminer, examinons encore un exemple de suite:

$\alpha, \ 2\alpha^2, \ 3\alpha^3, \ \ldots, \ n\alpha^n, \ \ldots \ (\alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1).$

Donc,

$$u_n = n\alpha^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

On voit aisément que

$$u_{n+2} = 2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n;$$

en effet,

$$2\alpha u_{n+1} - \alpha^2 u_n = 2\alpha (n+1) \alpha^{n+1} - \alpha^2 n\alpha^n = (n+2) \alpha^{n+2} = u_{n+2}.$$

Etant donné que $k = 2$, $a_1 = 2\alpha$ et $a_2 = -\alpha^2$, la suite des sommes $\{s_n\}$ ($s_1 = \alpha$, $s_2 = \alpha + 2\alpha^2$, $s_3 = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3, \ldots$) satisfera à la relation [voir (30)]:

$$s_{n+3} = (a_1 + 1) s_{n+2} + (a_2 - a_1) s_{n+1} - a_2 s_n = \\ = (2\alpha + 1) s_{n+2} - (\alpha^2 + 2\alpha) s_{n+1} + \alpha^2 s_n.$$

L'échelle de récurrence correspondante est:

$$q^3 = (2\alpha + 1) q^2 - (\alpha^2 + 2\alpha) q + \alpha^2.$$

Il est aisé de voir qu'elle est satisfaite pour $q = \alpha$. En divisant le polynôme $q^3 - (2\alpha + 1) q^2 + (\alpha^2 + 2\alpha) q - \alpha^2$ par $q - \alpha$, nous obtenons au quotient:

$$q^2 - (\alpha + 1) q + \alpha.$$

Par conséquent, les deux autres racines de l'échelle de récurrence satisfont à la relation suivante:

$$q^2 - (\alpha + 1) q + \alpha = 0.$$

Ces racines sont: α et 1.

Donc, l'échelle de récurrence a pour racine α d'ordre de multiplicité $a = 2$ et une racine simple $\beta = 1$.

C'est pourquoi, pour s_n nous obtenons [voir formule (69) où au lieu de u_n il faut écrire s_n, $\alpha = \alpha$, $Q(x) = B_0 + B_1 x$,

polynôme du premier degré; $\beta = 1$ et $R(x) = C_0$, constante]:

$$s_n = [B_0 + B_1(n-1)]\,\alpha^{n-1} + C_0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les coefficients B_0, B_1 et C_0 sont trouvés pas un système d'équations correspondant aux valeurs $n = 1, 2, 3$:

$$B_0 + C_0 = s_1 = \alpha,$$

$$(B_0 + B_1)\,\alpha + C_0 = s_2 = \alpha + 2\alpha^2,$$

$$(B_0 + 2B_1)\,\alpha^2 + C_0 = s_3 = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3.$$

D'où nous trouvons:

$$B_0 = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{(\alpha-1)^2}, \quad B_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \quad \text{et} \quad C_0 = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}.$$

Par conséquent,

$$s_n = [B_0 + B_1(n-1)]\,\alpha^{n-1} + C_0 = \frac{n\alpha^{n+2} - (n+1)\,\alpha^{n+1} + \alpha}{(\alpha-1)^2} = \frac{u_n\alpha^2 - (u_{n+1} - u_1)}{(\alpha-1)^2}.$$

* * *

Cette partie du livre se proposait de donner au lecteur une idée de la diversité des suites récurrentes et de leur rôle en mathématiques. De plus, nous avons montré que les suites récurrentes ne se sont pas fortement éloignées des plus simples d'entre elles: progression géométrique et suites des puissances de nombres naturels (en particulier, de la suite des nombres naturels mêmes, constituant une progression arithmétique) et qu'elles peuvent être exprimées à l'aide de ces suites élémentaires.

Mais on rencontre déjà, à chaque pas, en mathématiques élémentaires des suites qui ne sont pas récurrentes. Telle est, par exemple, une des suites les plus importantes des sciences mathématiques, celle des nombres premiers:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Cette suite avec ses propriétés profondes et complexes est étudiée dans la *théorie des nombres.*

Ne sont pas non plus récurrentes les suites de valeurs de nombreuses fonctions élémentaires, telles que :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

(suite des valeurs de la fonction $y=\frac{1}{x}$ pour $x=1, 2, 3 \ldots$), ou

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots,$$

$$\log 1, \log 2, \log 3, \log 4, \ldots, \log n, \ldots$$

(suite des valeurs des fonctions $\sqrt{x}$ et $\log x$), etc.

L'étude de ces suites et d'autres semblables [1]) (et avec elles des suites récurrentes) fait l'objet d'une discipline mathématique déjà évoquée — le *calcul des différences finies.*

Enfin, dans le cours de mathématiques élémentaires et, en particulier, dans le cours d'analyse mathématique, étudié dans les écoles supérieures, un grand rôle est joué par les séries convergentes, c'est-à-dire des séries tendant vers des limites finies. Leur étude constitue la tâche majeure de la théorie des limites et constitue une des bases de *l'analyse mathématique.* Les propriétés de différents termes des suites ne jouent ici qu'un rôle secondaire : ce qui importe, c'est l'existence d'une limite et la grandeur de cette limite.

Nous jugeons nécessaire de faire ces remarques, afin que le lecteur comprenne que la théorie des suites récurrentes, que nous avons exposée, ne représente, tant du point de vue de son objet que du point de vue des lois mises en évidence par elle, qu'un chapitre très particulier et fort modeste de la théorie des séries.

---

[1]) Il s'agit des séries de valeurs des *fonctions* dites *analytiques*, dont les fonctions élémentaires sont les représentants les plus simples.

Nombres complexes et représentations conformes

1



Fig. 1

Pour représenter géométriquement des nombres réels on recourt à un *axe numérique*, c'est-à-dire une droite dont sont donnés un point A, *origine* des coordonnées représentant le nombre 0 et un autre point B, représentant le nombre $+1$ (fig. 1).

La direction de A vers B est considérée comme le sens positif de l'axe numérique, le segment AB, comme l'unité de longueur. Tout segment AC représente un nombre réel x, dont la valeur absolue est égale à la longueur du segment. Si C ne coïncide pas avec A (c'est-à-dire si le nombre x n'est pas égal à zéro), x est positif quand la direction de A vers C coïncide avec le sens positif de l'axe, et négatif quand cette direction est opposée au sens positif de l'axe.

2 Nous considérerons tous les segments de l'axe comme des segments orientés (*vecteurs sur une droite*). On distingue dans chaque vecteur une origine et une extrémité et l'on prend la direction de l'origine vers l'extrémité comme sens de parcours du vecteur. Nous représenterons les vecteurs par deux lettres : la première marquant l'origine, la seconde, l'extrémité. Chaque vecteur représentera, quel que soit le point de son origine (pas forcément en A), un certain nombre réel, dont la valeur absolue est égale à la longueur du vecteur. Ce nombre est positif quand le sens du vecteur coïncide avec le sens positif de l'axe, et négatif, quand le sens du vecteur est opposé au sens positif de l'axe. Ainsi,

par exemple, le vecteur AB (origine A, extrémité B) représente le nombre $+1$: le vecteur BA (origine B, extrémité A), le nombre -1.

3 On peut déterminer le sens du vecteur en indiquant l'angle formé avec la direction positive de l'axe. Si le sens du vecteur est le même que le sens positif de l'axe, cet angle peut être considéré égal à 0°. S'il est opposé au sens positif de l'axe, cet angle peut être considéré égal à 180° (ou —180°). Soit x un nombre réel quelconque; si $x \neq 0$, l'angle entre le vecteur représentant ce nombre et le sens positif de l'axe s'appelle *argument* du nombre x. Il est évident que l'argument d'un nombre positif est égal à 0°, et l'argument d'un nombre négatif, à 180° (ou —180°). L'argument du nombre x s'écrit ainsi : $\arg x$. Le nombre 0 est représenté, non pas par un vecteur, mais par un point. Bien que, dans la suite, nous considérions le point comme un cas particulier de vecteur, vecteur de longueur nulle, nous ne pouvons parler, dans ce cas, ni de direction, ni d'angle formé avec l'axe. C'est pourquoi nous n'attribuerons au nombre 0 aucun argument.

4 Voyons maintenant l'interprétation géométrique des opérations sur des nombres réels. Il faut s'arrêter ici sur l'interprétation de l'addition et de la multiplication, dont on passera facilement à l'interprétation des opérations inverses, soustraction et division. Soit c_1 et c_2 deux nombres réels, AB_1 et AB_2 les vecteurs qui les représentent. Nous allons choisir les règles au moyen desquelles, connaissant les vecteurs AB_1 et AB_2, on peut construire le vecteur représentant la somme $c_1 + c_2$ ou le produit c_1c_2. Commençons par l'addition. Que faut-il faire avec le vecteur AB_1, représentant le premier terme, pour obtenir le vecteur AC représentant la somme?

Il est facile de vérifier que, dans tous les cas, il suffit pour cela de porter sur l'axe, à partir de l'extrémité du vecteur AB_1, un vecteur B_1C de même longueur et de même

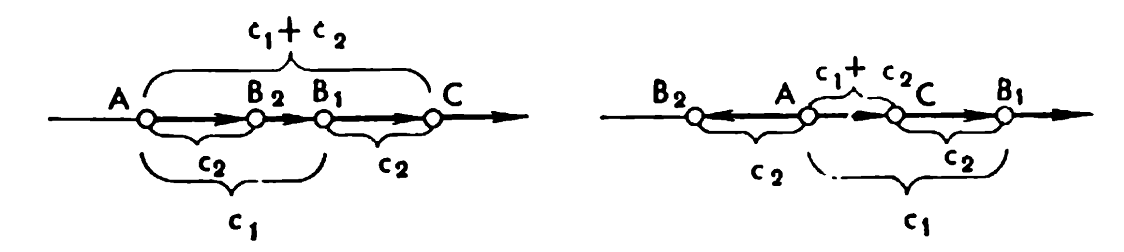


Fig. 2

sens que le vecteur AB_2; le vecteur AC est celui que l'on cherche (fig. 2).

5 Passons à la multiplication. Si l'un des facteurs est égal à zéro, le produit sera aussi égal à zéro ; dans ce cas, le vecteur représentant le produit se ramène tout simplement à un point. Supposons qu'aucun facteur ne soit égal à zéro. Dans ce cas, la valeur absolue [1]) du produit c_1c_2 sera égale à $|c_1| \cdot |c_2|$, c'est-à-dire au produit des valeurs absolues de c_1 et c_2. C'est pourquoi la longueur du vecteur AD, représentant le produit, sera égale au produit des longueurs des vecteurs AB_1 et AB_2, représentant les facteurs. Le signe du produit c_1c_2 coïncidera avec le signe de c_1 si $c_2 > 0$ et sera contraire si $c_2 < 0$. En d'autres termes, la direction de AD coïncidera avec le sens de AB_1 si arg $c_2 = 0$ (ce qui veut dire que $c_2 > 0$) et sera opposée au sens de AB_1 si arg $c_2 = 180°$ (ce qui veut dire que $c_2 < 0$). Maintenant, il est facile de répondre à la question : que faut-il faire avec le vecteur AB, représentant le multiplicande c_1, pour obtenir à partir de lui un vecteur AD représentant le produit c_1c_2, ($c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$)? Il faut multiplier la longueur AB_1 par $|c_2|$ (sans changer le sens du vecteur AB_1), puis faire tourner le vecteur multiplié d'un angle égal à l'argument de c_2

---

[1]) La valeur absolue d'un certain nombre c est représentée comme suit : $|c|$. Par exemple $|5|=5$, $|-3|=3$, $|0|=0$.

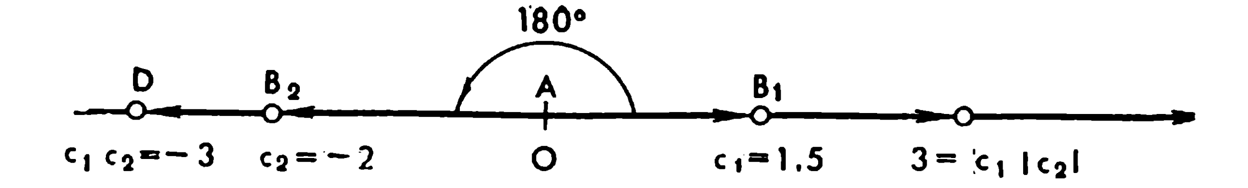


Fig. 3

(c'est-à-dire de 0° si $c_2 > 0$, ou de 180° si $c < 0$) ; le vecteur obtenu représentera le produit. La figure 3 explique cette règle sur un exemple ($c_1 = 1,5$ et $c_2 = -2$).

6 Nous avons rattaché à chaque vecteur sur la droite un nombre représenté par ce vecteur. Examinons maintenant tous les vecteurs possibles sur le plan et rattachons également à chacun d'eux un nombre représenté par ce vecteur. Les nombres auxquels nous arrivons de cette façon — *nombres complexes* — sont d'un autre caractère, plus général que les nombres réels. Ces derniers sont seulement un cas particulier des nombres complexes, de même que les nombres entiers sont un cas particulier des nombres rationnels, et les nombres rationnels, un cas particulier des nombres réels.

Commençons par mener, sur le plan dont nous allons considérer les vecteurs, deux droites réciproquement perpendiculaires, deux axes numériques Ax et Ay, avec une origine commune des coordonnées A, et supposons que le segment AB représente l'unité de longueur (fig. 4). Tout vecteur se trouvant sur l'axe Ax ou parallèle à cet axe, peut comme précédemment être considéré comme la représentation géométrique d'un nombre réel. Ainsi, les vecteurs AB et $A'B'$, dont la longueur de chacun est égale à l'unité et dont les sens coïncident avec le sens positif de Ax, représentent le nombre 1 ; le vecteur CD de longueur 2 et de sens directement opposé figure le nombre —2. Les vecteurs qui

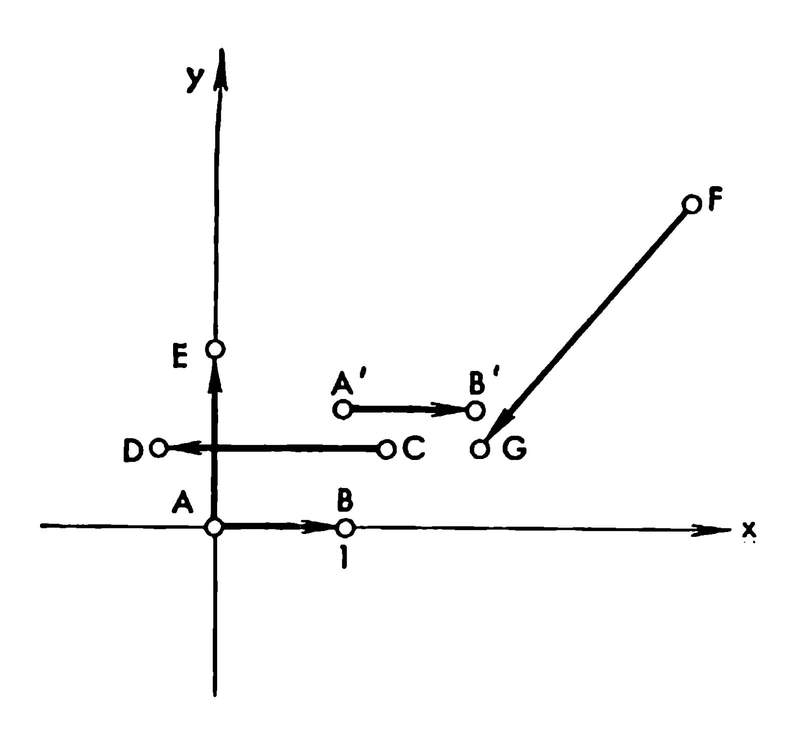


Fig. 4

ne se trouvent pas sur Ax et ne lui sont pas parallèles, tels que AE et FG, ne représentent aucun nombre réel. A propos de ces vecteurs, nous dirons qu'*ils représentent des nombres imaginaires*. De plus, des vecteurs de longueur égale, parallèles entre eux et orientés dans le même sens figurent le même nombre ; les vecteurs de longueur ou de sens différents, des nombres imaginaires différents. Ici, nous anticipons un peu, car, sans savoir ce qu'est un nombre imaginaire, nous parlons déjà de sa représentation, mais, dans la vie, il n'est pas rare que la connaissance du portrait précède la connaissance de l'original.

Nous avons montré plus haut que l'on peut substituer, à des opérations sur des nombres réels, des opérations sur les vecteurs représentant ces nombres. Nous remplacerons de même les opérations sur des nombres imaginaires par des opérations sur les vecteurs qui les représentent. Nous n'imaginerons pas de nouvelles règles, nous conserverons, dans

la forme géométrique, les règles trouvées pour l'addition et la multiplication des nombres réels. La seule différence sera que ces derniers étaient représentés par des vecteurs sur la droite Ax (ou des vecteurs parallèles à cette droite), tandis que les nombres imaginaires sont représentés par des vecteurs sur le plan, non situés sur Ax et non parallèles à Ax.

7 Avant d'aller plus loin, soulignons qu'on appelle *nombres complexes* aussi bien des nombres réels (déjà connus) que des nombres imaginaires (dont nous ne connaissons encore que les « portraits »).

Pour comparaison, rappelons qu'on emploie aussi, pour les nombres rationnels et irrationnels considérés ensemble, une désignation commune: nombres réels.

Occupons-nous de l'addition des nombres complexes. Nous avons convenu de laisser en vigueur la règle formulée pour l'addition des nombres réels. Soit AB_1 et AB_2 deux vecteurs représentant certains nombres complexes c_1 et c_2; pour construire le vecteur représentant leur somme $c_1 + c_2$, nous portons, à partir de l'extrémité du vecteur AB_1, un vecteur B_1C de même longueur et de même sens que le vecteur AB_2; le vecteur AC réunissant l'origine de AB_1 avec l'extrémité de B_1C sera le vecteur cherché (fig. 5).

Ce qu'il y a de nouveau ici, c'est que nous appliquons maintenant cette règle à l'addition des nombres complexes (représentés par n'importe quels vecteurs sur le plan), tandis qu'auparavant nous l'appliquions seulement à des nombres réels (représentés par des vecteurs sur la droite).

Si l'on applique cette même règle pour la construction de la somme $c_2 + c_1$ (les termes ont interchangé leurs places), il faut, à partir de l'extrémité du vecteur AB_2, représentant c_2, porter un vecteur de même longueur et de même sens que le vecteur AB_1 (représentant c_1). Il est évident que nous arrivons au même point C (sur la figure 5 on obtient un parallélogramme) et, par conséquent, la somme $c_2 + c_1$

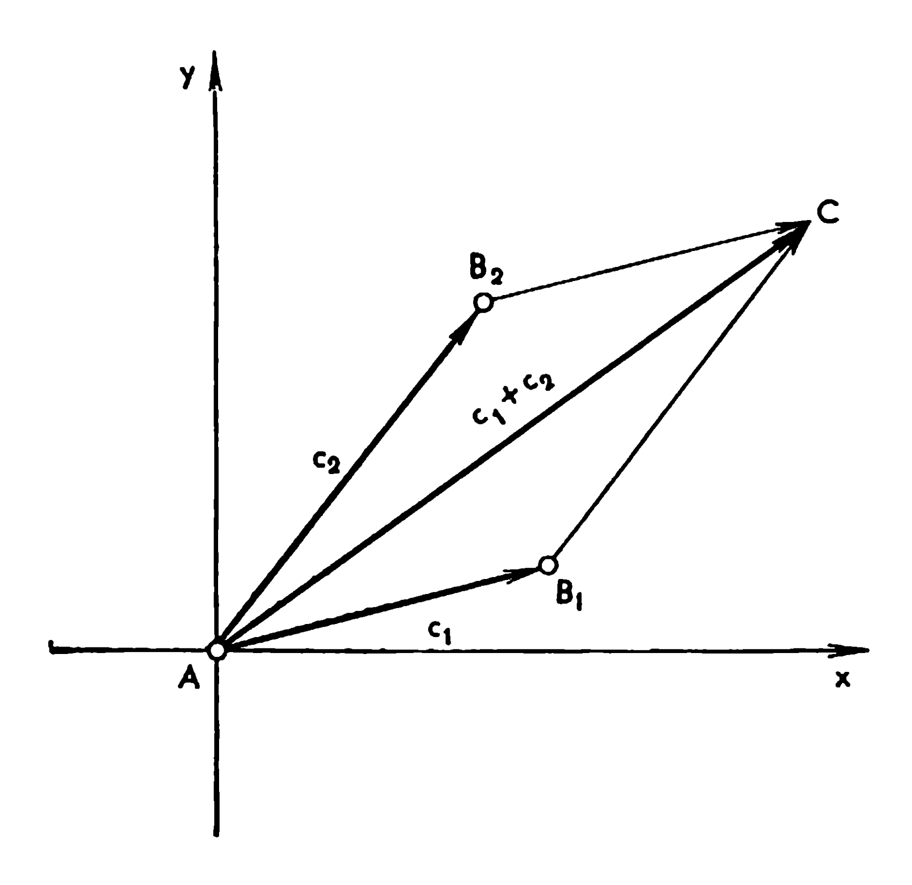


Fig. 5

est représentée par le même vecteur AC que la somme $c_1 + c_2$. En d'autres termes, de la règle de l'addition découle la justesse de la loi de commutativité :

$$c_2 + c_1 = c_1 + c_2.$$

Il est aisé de démontrer que la loi de l'associativité est également vraie :

$$(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3).$$

Toutes les constructions nécessaires sont données sur la figure 6. Il est évident qu'en additionnant $(c_1 + c_2)$ (AC) et c_3 (CD) nous obtenons le même vecteur AD qu'en additionnant c_1 (AB_1) et $(c_2 + c_3)$ (B_1D).

8 Avant de passer à la multiplication, appliquons aux nombres complexes les notions de valeur absolue et d'argument.

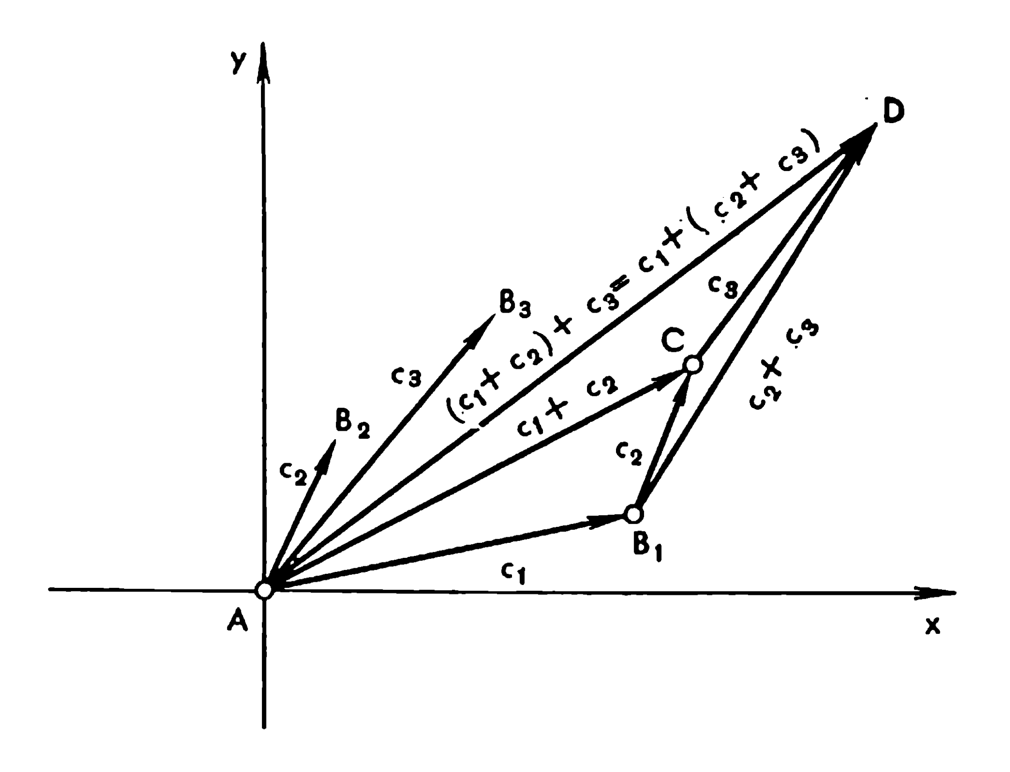


Fig. 6

Soit un vecteur AB représentant un nombre complexe c. On appelle valeur absolue de c la longueur du vecteur AB, et argument de c, l'angle entre la direction positive de l'axe Ax et le vecteur AB. Cet angle peut être mesuré soit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, il a alors une valeur positive, soit dans le sens des aiguilles d'une montre, il a alors une valeur négative ; de plus, on peut lui ajouter arbitrairement un entier quelconque multiple de 360°.

La valeur absolue et l'argument du nombre c s'écrivent de la même façon que pour les nombres réels : $|c|$ et arg c. Ce qu'il y a de nouveau, en comparaison du cas des nombres réels, c'est que l'argument d'un nombre imaginaire est différent de 0° et de $\pm 180°$, alors que pour des nombres réels (non égaux à 0) l'argument peut être soit 0° (si le nombre est positif), soit $\pm 180°$ (s'il est négatif).

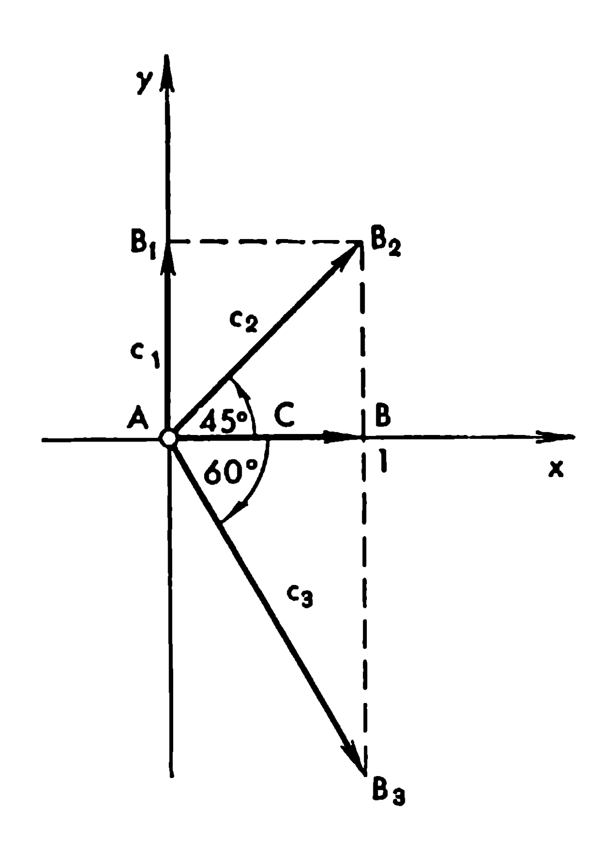


Fig. 7

La figure 7 représente des vecteurs AB, AB_1, AB_2 et AB_3 figurant des nombres complexes: c, c_1, c_2 et c_3. Le lecteur vérifiera facilement la justesse des affirmations suivantes:

$$|c| = |c_1| = 1; \quad |c_2| = \sqrt{2}; \quad |c_3| = 2;$$

$$\arg c = 0°; \quad \arg c_1 = 90°; \quad \arg c_2 = 45°; \quad \arg c_3 = -60° \text{ (ou } 300°).$$

9 Après avoir introduit les notions de valeur absolue et d'argument d'un nombre complexe, on peut énoncer aussi la règle de multiplication des nombres complexes. Elle coïncide littéralement avec la règle correspondante de multiplication des nombres réels: pour multiplier un nombre complexe c_1 par un nombre complexe c_2 ($c_1 \neq 0$ et $c_2 \neq 0$), il faut multiplier par $|c_2|$ la longueur du vecteur figurant c_1 (sans changer le sens du vecteur), puis faire tourner le vec-

teur multiplié autour du point A d'un angle égal à l'argument de c_2; le vecteur obtenu représente le produit c_1c_2. Par exemple, le produit c_1c_2 est représenté par le vecteur AD (fig. 8), et le produit c_2c_3, par le vecteur AE (fig. 9).

Il faut encore ajouter à la règle de la multiplication qu'au cas où un des facteurs est égal à zéro, le produit est également égal à zéro.

Si l'on veut appliquer la règle de la multiplication au produit c_2c_1 (l'ordre des facteurs est interverti), il faudra multiplier $|c_1|$ fois la longueur du vecteur représentant c_2 et faire tourner le vecteur multiplié autour du point A d'un angle égal à l'argument de c_1. Il est évident que l'on obtient le même résultat que lorsqu'on multipliait c_1c_2; dans les deux cas, la longueur du vecteur obtenu est $|c_1|\ |c_2|$ et l'angle entre Ax et ce vecteur est égal à $\arg c_1 + \arg c_2$.

$$c_1c_2 = c_2c_1,$$

c'est-à-dire que la loi de commutativité est également valable pour la multiplication des nombres complexes.

La loi d'associativité l'est également:

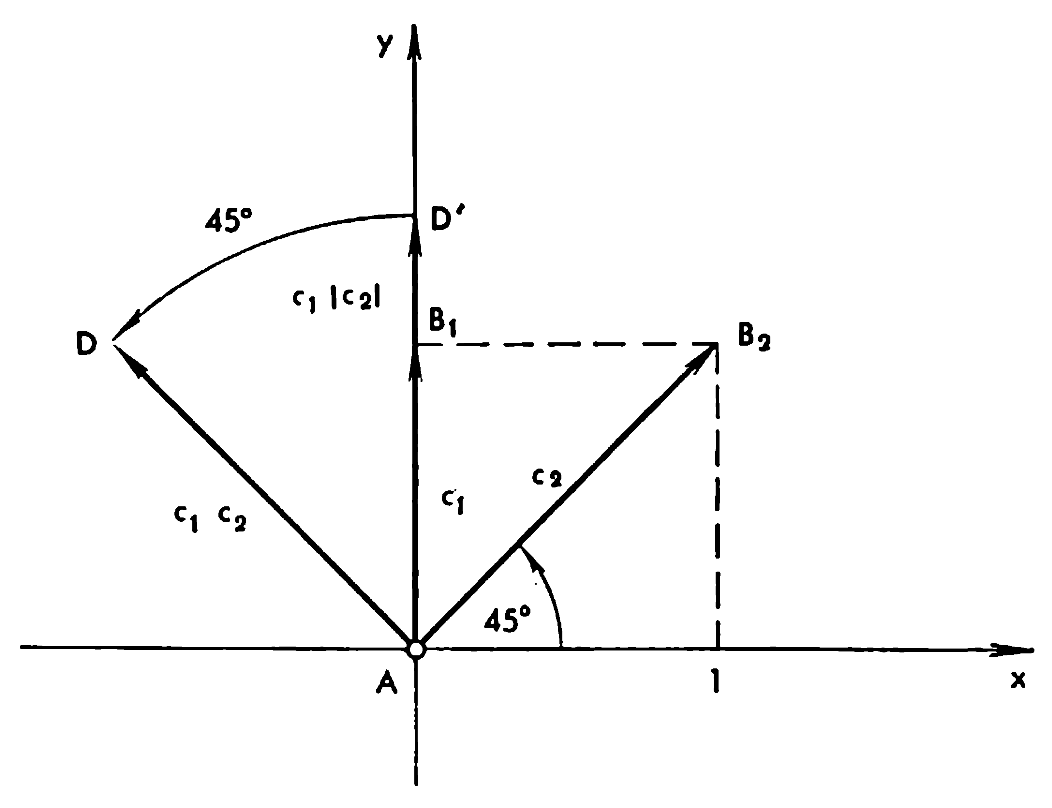
$$(c_1c_2)\, c_3 = c_1\, (c_2c_3).$$

En effet, chacun des produits considérés est représenté par un seul et même vecteur; sa longueur est $|c_1|\cdot|c_2|\cdot|c_3|$ et l'angle entre l'axe Ax et ce vecteur est égal à $\arg c_1 + \arg c_2 + \arg c_3$.

Démontrons, enfin, que la loi de distributivité est aussi valable:

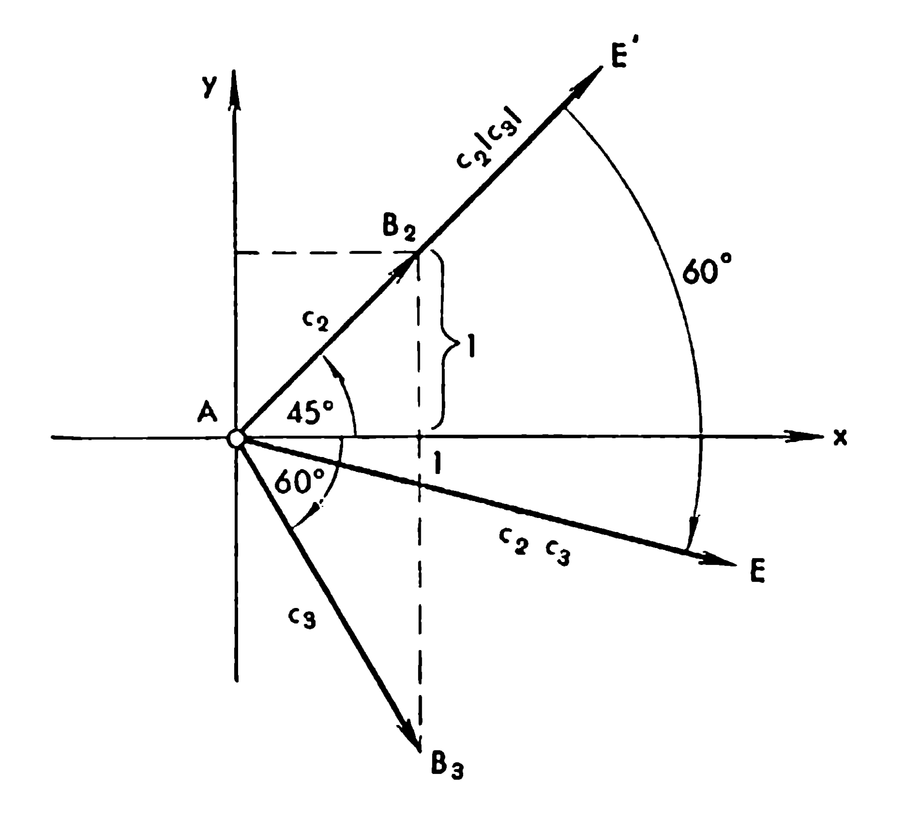
$$(c_1 + c_2)\, c_3 = c_1c_3 + c_2c_3.$$

Sur la figure 10, le vecteur AB représente la somme $c_1 + c_2$; si, sans changer le sens de AB_1 et AB_2, on multiplie toutes les longueurs des côtés du triangle AB_1B par $|c_3|$, on obtient le triangle AK_1L_1, semblable au triangle AB_1B. Il est formé par les vecteurs AK_1, K_1L_1, AL_1 obtenus à partir des vecteurs c_1, c_2 et $(c_1 + c_2)$ en multipliant toutes les longueurs



y
45°
D'
$c_1 | c_2|$
B1
D
B2
c_1
c_2
$c_1 \ c_2$
45°
A
1
x

Fig. 8



y
E'
$c_2 | c_3|$
B2
60°
c_2
1
A
45°
x
1
60°
$c_2 \ c_3$
E
c_3
B3

Fig. 9

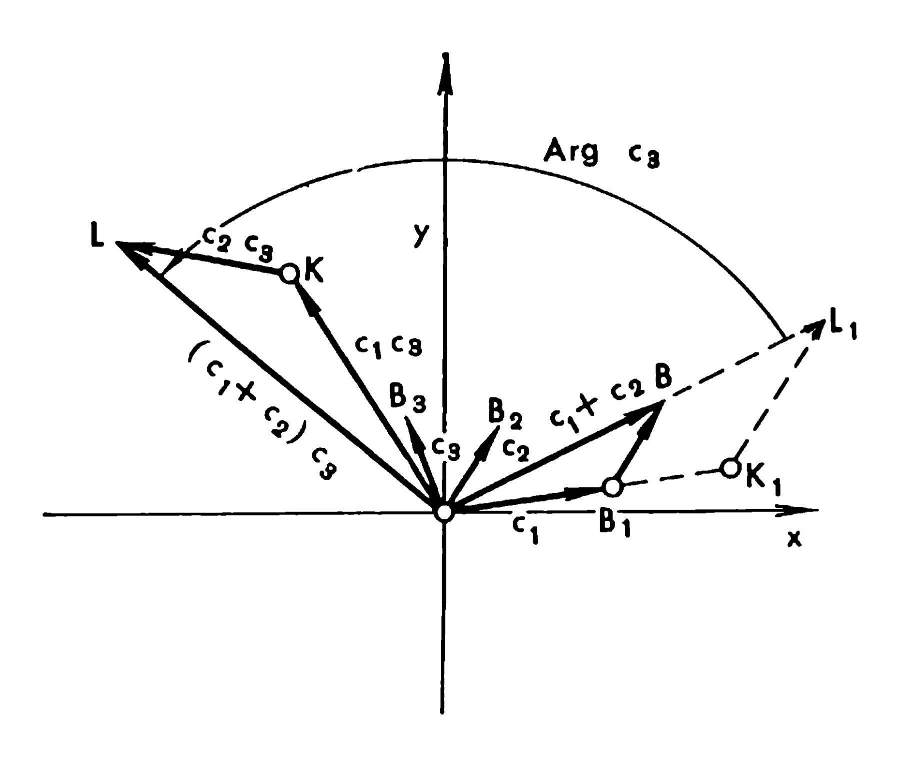


Fig. 10

par $|c_3|$ (sans modifier les sens). Faisons tourner maintenant le triangle AK_1L_1 autour du point A de l'angle arg c_3; on obtient le triangle AKL. D'après la règle de la multiplication, le vecteur AK y représente le produit c_1c_3, KL, c_2c_3, et AL, $(c_1 + c_2)\, c_3$. D'après la règle de l'addition, nous trouvons à partir du même triangle :

$$c_1c_3 + c_2c_3 = (c_1 + c_2)\, c_3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

10 Les opérations de la soustraction et de la division sont définies comme l'inverse de l'addition et de la multiplication. Précisément, nous appelons un nombre complexe d différence des nombres c_1 et c_2 et écrivons $d = c_1 - c_2$, si $c_1 = c_2 + d$, c'est-à-dire si c_1 est la somme de c_2 et de d. En représentant cette relation entre c_2, d et c_1 sur un graphique (fig. 11), nous voyons que le vecteur représentant la

différence $c_1 - c_2$ est obtenu si le point B_2 (extrémité du vecteur représentant le nombre retranché) est réuni au point B_1 (extrémité du vecteur représentant le nombre duquel on retranche) et si le premier point est considéré comme l'origine du vecteur, et le second, comme l'extrémité de ce vecteur.

D'une façon analogue, le nombre complexe r est appelé quotient des nombres c_1 et c_2 ($c \neq 0$) et nous écrivons $r = c_1 : c_2$ ou $r = \frac{c_1}{c_2}$ si $c_1 = c_2 r$, c'est-à-dire, si c_1 est le produit de c_2 par r (fig. 12).

Il en découle que $|r|$, longueur du vecteur représentant r, est égal à $\frac{|c_1|}{|c_2|}$ et que $\arg r$ est égal à l'angle B_2AB_1 mesuré dans le sens de AB_2 vers AB_1 (sur la figure 12 c'est le sens d'une rotation suivant les aiguilles d'une montre, donc, l'angle doit être considéré comme négatif).

Notons des cas particuliers. Si c_1 et c_2 sont représentés comme des vecteurs parallèles et dirigés dans le même sens, l'angle B_2AB_1 est égal à 0°, par conséquent, $\arg r = 0°$, c'est-à-dire r est un nombre réel positif. Si c_1 et c_2 sont représentés comme des vecteurs parallèles, mais de sens opposés, l'angle B_2AB_1 est égal à 180° et le nombre r est réel et négatif.

Pour résumer, on peut dire que l'addition et la multiplication des nombres complexes satisfont aux mêmes lois de commutativité, associativité et distributivité que les nombres réels et que la soustraction et la division, de même que pour les nombres réels, sont définies comme les opérations inverses de l'addition et de la multiplication. C'est pourquoi toutes les règles et formules déduites en algèbre pour les nombres réels, sur la base de la définition des opérations et des lois mentionnées, doivent rester en vigueur pour les nombres complexes. Par exemple :

$$(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = c_1^2 - c_2^2, \quad (c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2,$$

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_3}{c_4} = \frac{c_1c_4 + c_2c_3}{c_2c_4} \quad (c_2 \neq 0 \text{ et } c_4 \neq 0), \text{ etc.}$$

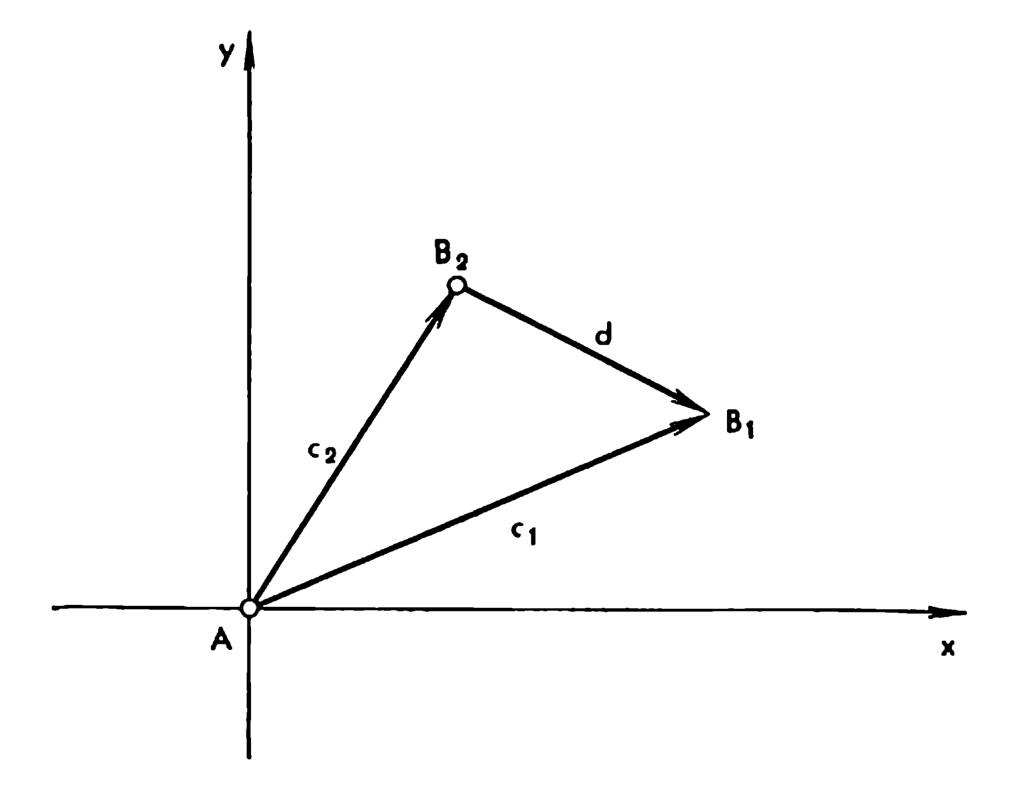


Fig. 11

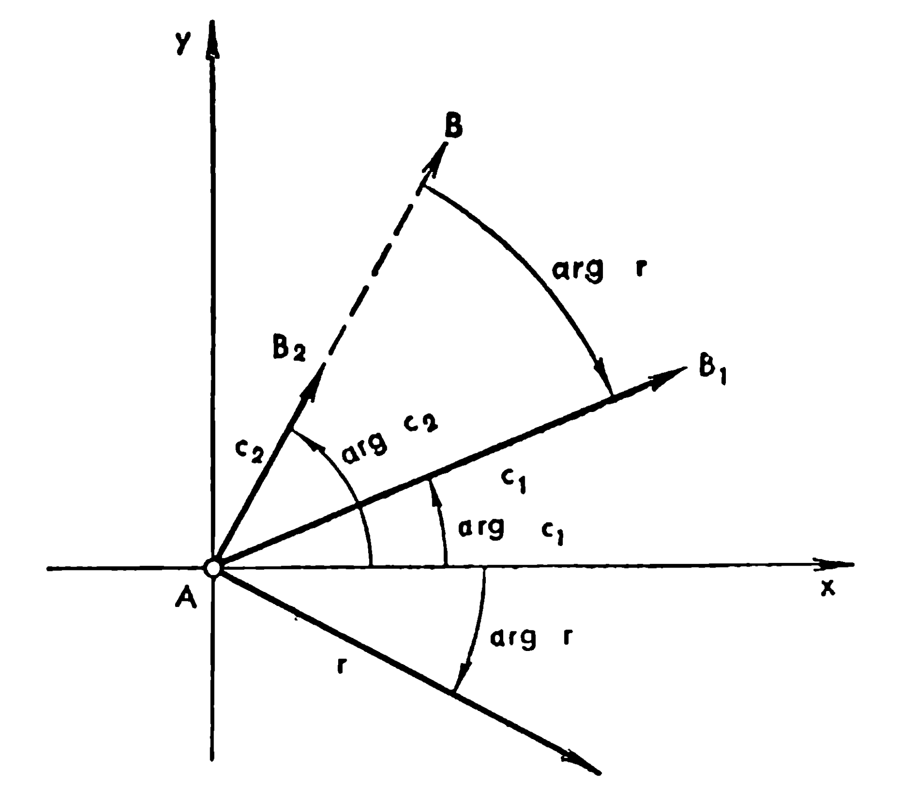


Fig. 12

11 En étudiant les mathématiques, le lecteur rencontre souvent une extension (ou la généralisation) de la notion de nombre. Ce fut le cas en arithmétique à propos des fractions ; en algèbre, à propos des nombres négatifs et, ensuite, des nombres irrationnels. Toute extension de la notion de nombre ouvre la voie de la solution de problèmes paraissant jusque-là insolubles ou même privés de sens. Ainsi, l'introduction des fractions a permis d'effectuer la division de deux nombres dans tous les cas où le diviseur est différent de zéro ; par exemple, de diviser 4 par 3 ou 2 par 5 ; l'introduction des nombres négatifs a permis d'effectuer la soustraction dans tous les cas, par exemple de retrancher 5 de 2 ; l'introduction des nombres irrationnels a permis d'exprimer par un nombre la longueur de n'importe quel segment incommensurable avec l'unité, par exemple la longueur de la diagonale d'un carré dont le côté est égal à l'unité. Toutefois, en nous contentant seulement de nombres réels, nous ne pourrions extraire la racine d'un nombre négatif. Nous allons nous convaincre que l'introduction des nombres complexes permet de résoudre ce problème. Tout naturellement, nous appellerons racine carrée d'un nombre complexe c (représentons la racine par le signe $\sqrt{c}$) un nombre a dont le carré (c'est-à-dire le produit de a par lui-même) est égal à c. En d'autres termes, $a = \sqrt{c}$ signifie que $aa = c$. Soit c un nombre négatif, par exemple $c = -1$; si nous voulons trouver $\sqrt{-1}$, nous devons résoudre l'équation $a^2 = -1$. Multiplier a par a signifie, premièrement, multiplier la longueur du vecteur représentant a par $|a|$, c'est-à-dire par la même longueur sans changer le sens de a et, ensuite, faire tourner le vecteur obtenu autour du point A d'un angle égal à arg a. Il est évident que la longueur du vecteur obtenu doit être égale à $|a|^2$. Mais le vecteur obtenu doit représenter le nombre -1 ; c'est pourquoi sa longueur est égale à l'unité. Donc, $|a|^2 = 1$ et, par conséquent, $|a| = 1$ (la longueur du vecteur n'est jamais négative). Poursuivons, l'angle

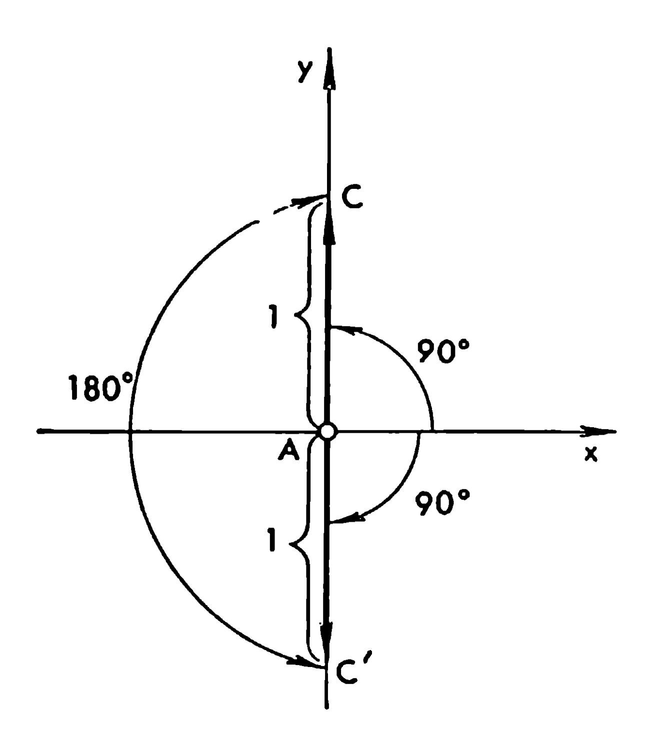


Fig. 13

entre le vecteur représentant a^2 et l'axe Ax est égal à arg a + + arg a = 2 arg a; d'autre part, $a^2 = -1$, alors cet angle doit être égal à +180° ou —180°. C'est pourquoi 2 arg a = = ±180°, d'où: soit arg a = 90°, soit arg a = —90°. Par conséquent, nous avons obtenu deux vecteurs distincts AC et AC' représentant deux valeurs différentes de $\sqrt{-1}$ (fig. 13). Le nombre imaginaire représenté par le vecteur AC est désigné par la lettre i et s'appelle *unité imaginaire*; nous avons: $|i| = 1$, arg i = 90°. On comprend aisément que le nombre imaginaire représenté par le vecteur AC' peut être obtenu à partir de i en multipliant i par —1. En effet, d'après la règle de multiplication, il suffit pour cela de multiplier la longueur AC par $|-1| = 1$ (ce qui ne fait pas changer le vecteur AC) et ensuite de la faire tourner d'un angle arg (—1) = 180°; on obtient le vecteur AC'. Le nombre imaginaire correspondant à ce vecteur est par conséquent $i(-1)$ ou $-1 \cdot i$; en bref, $-i$. Donc, $\sqrt{-1} = \pm i$.

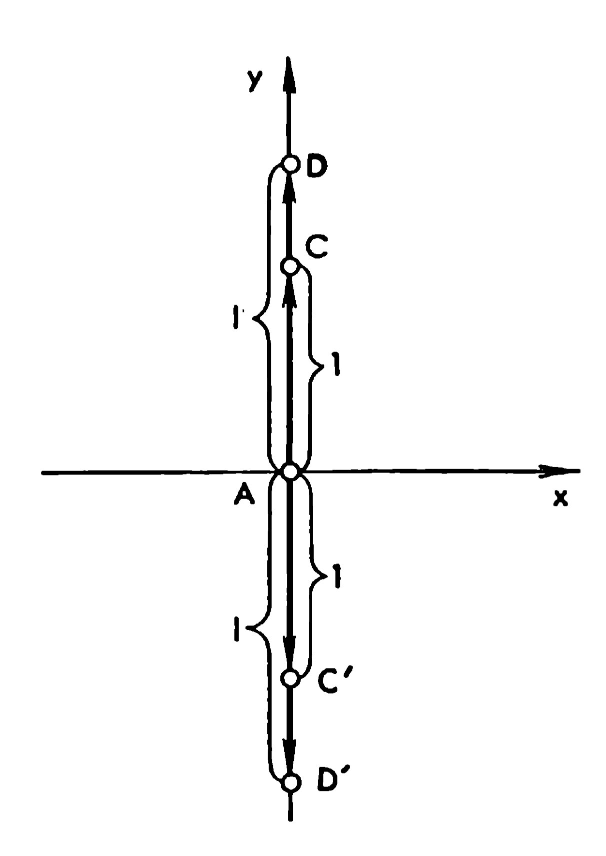


Fig. 14

12 Considérons un vecteur AD quelconque situé sur l'axe Ay (ou parallèle à cet axe) (fig. 14). Soit l sa longueur. Si le sens de ce vecteur coïncide avec le sens positif de l'axe Ay (au-dessus de Ax), le nombre imaginaire c qu'il représente peut être obtenu à partir de i en le multipliant par un nombre positif l; par conséquent, $c = l \cdot i$ ou, brièvement, $c = li$.

Si le sens de AD est opposé au sens positif de Ay, le nombre c est obtenu à partir de i en le multipliant par le nombre négatif $-l$ (ou à partir de $-i$ en le multipliant par l); par conséquent, dans ce cas $c = (-l) \cdot i$ ou, brièvement, $c = -li$.

Donc, tout vecteur (de longueur non égale à zéro) situé sur l'axe Ay (ou parallèle à cet axe) représente un nombre imaginaire du type $\pm li$ où l'on prend le signe $+$ ou $-$ suivant que le sens du vecteur coïncide avec le sens positif de Ay ou lui est opposé. C'est la raison pour laquelle l'axe

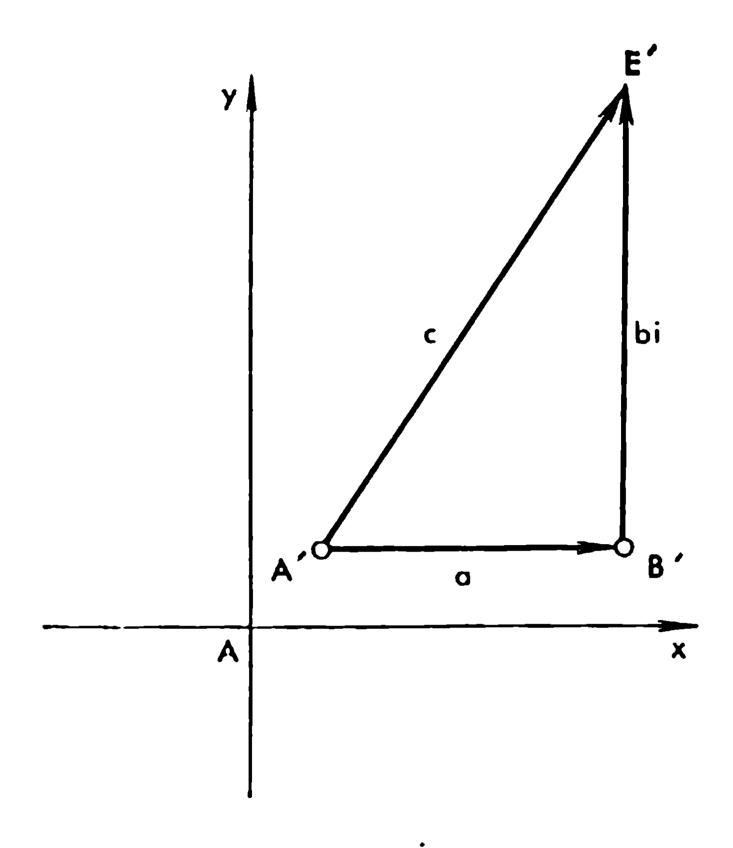


Fig. 15

Ay est appelé *axe imaginaire*. L'axe Ax, dont tous les vecteurs représentent des nombres réels, s'appelle l'*axe réel*.

Examinons un vecteur $A'E'$ quelconque situé ni sur l'un ni sur l'autre axe et non parallèle à eux. Au moyen de la construction de la figure 15 on peut figurer le nombre c, représenté par ce vecteur, sous la forme de deux autres nombres: l'un, figuré par le vecteur $A'B'$, parallèle à Ax (ou situé sur Ax) et un autre, représenté par le vecteur $B'E'$, parallèle à Ay. Mais $A'B'$ représente un certain nombre réel a, et $B'E'$, un nombre imaginaire de la forme bi, c'est pourquoi $c = a + bi$.

Ainsi, nous avons représenté le nombre imaginaire c par des nombres réels a et b et l'unité imaginaire i. Comme le vecteur $A'E'$ n'est parallèle ni à l'un ni à l'autre axe, alors $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Il est facile de comprendre que les nombres représentés par des vecteurs parallèles à l'un et l'autre axes

peuvent être écrits sous une forme analogue, à savoir si le vecteur est parallèle à l'axe réel, il figure un nombre de la forme $a + 0 \cdot i$, et s'il est imaginaire, un nombre de la forme $0 + bi$.

Donc, tout nombre complexe c peut être représenté sous la forme $c = a + bi$, où a et b sont des nombres réels, et i, l'unité imaginaire.

13 Résumons. Nous avons commencé par représenter des nombres réels par des vecteurs situés sur une même droite, nous avons donné une forme géométrique aux règles d'opérations sur ces nombres en les ramenant à des opérations sur des vecteurs, puis nous avons considéré tous les vecteurs possibles sur le plan comme l'image de nombres d'une espèce plus générale, nombres complexes, qui, seulement dans un cas particulier (quand les vecteurs sont situés sur l'axe Ax ou lui sont parallèles), se ramènent à des nombres réels. En étendant aux vecteurs sur le plan les opérations applicables aux vecteurs sur une droite, nous avons introduit l'addition et la multiplication (et ensuite les opérations inverses, soustraction et division) et nous nous sommes rendus compte qu'elles obéissent aux mêmes lois que les opérations sur des nombres réels. Cependant, nous ne savons rien d'autre des nombres complexes mêmes, que le fait qu'ils peuvent être tous figurés par des vecteurs de façon que deux vecteurs quelconques de longueur égale, parallèles l'un à l'autre et dirigés dans le même sens, représentent un seul et même nombre complexe et que des vecteurs se distinguant soit par leur longueur, soit par leur sens, représentent des nombres différents. Nous nous sommes rendus compte aussi que les nombres complexes permettent d'extraire la racine carrée de -1 et nous avons introduit l'unité imaginaire i comme une des deux valeurs de $\sqrt{-1}$ (valeur de la racine dont l'argument est $+90°$). Enfin, en nous appuyant sur les règles des opérations sur les nombres complexes, nous avons montré que tout nombre complexe c peut être figuré

sous la forme $c = a + bi$, où a et b sont des nombres réels.

Donc, c est *constitué* par deux composantes a et bi; l'une, a, est représentée par un vecteur de l'axe réel et peut être considérée comme le produit d'un nombre réel a par l'unité réelle; l'autre, bi, est figurée par un vecteur de l'axe imaginaire et peut être considérée comme le produit d'un nombre réel b par l'unité imaginaire i. Cette structure de tout nombre complexe permet de comprendre pourquoi ces nombres ont été appelés complexes.

Remarquons que a est appelé partie réelle et b partie imaginaire du nombre c. Par exemple, pour le nombre $c = 3 - 2i$ la partie réelle est égale à 3, et la partie imaginaire, à -2.

14 Si l'on représente des nombres complexes c par des vecteurs ayant leur origine au même point A, à des nombres complexes non égaux entre eux correspondront des vecteurs ne coïncidant pas entre eux et inversement: à des vecteurs ne coïncidant pas, correspondront des nombres complexes différents. Soit $c = a + bi$; l'extrémité du vecteur AE figurant le nombre c aura pour abscisse a et pour ordonnée b (fig. 16).

Donc, si l'on met l'origine du vecteur représentant le nombre $c = a + bi$ à l'origine A des coordonnées, les nombres a et b seront les coordonnées de l'extrémité de ce vecteur. En partant de cette remarque, on peut représenter géométriquement les nombres complexes non seulement par des vecteurs, mais aussi par des points. Chaque nombre complexe $a + bi$ peut être figuré par un seul point E ayant pour coordonnées a et b et inversement: tout point E' ayant pour coordonnées a' et b' peut être considéré comme l'image d'un nombre complexe $a' + ib'$. La figure 17 montre des points E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 représentant les nombres suivants: -1, i, $-i$, $1 + i$, $1 - i$.

Pour plus de brièveté, nous appellerons souvent, dans la suite, par les mêmes mots « point z » le nombre complexe z

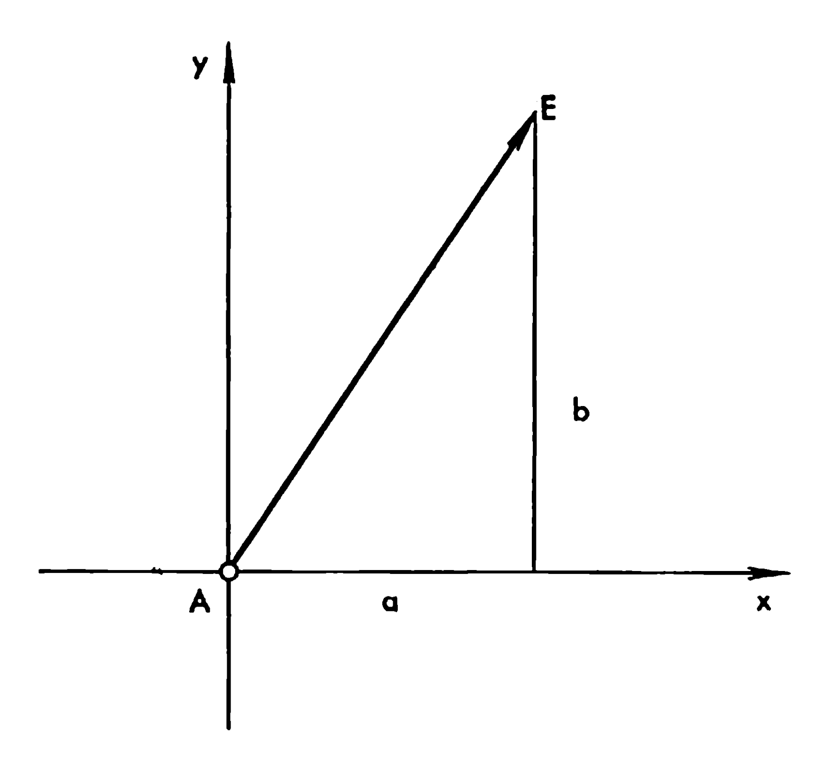


Fig. 16

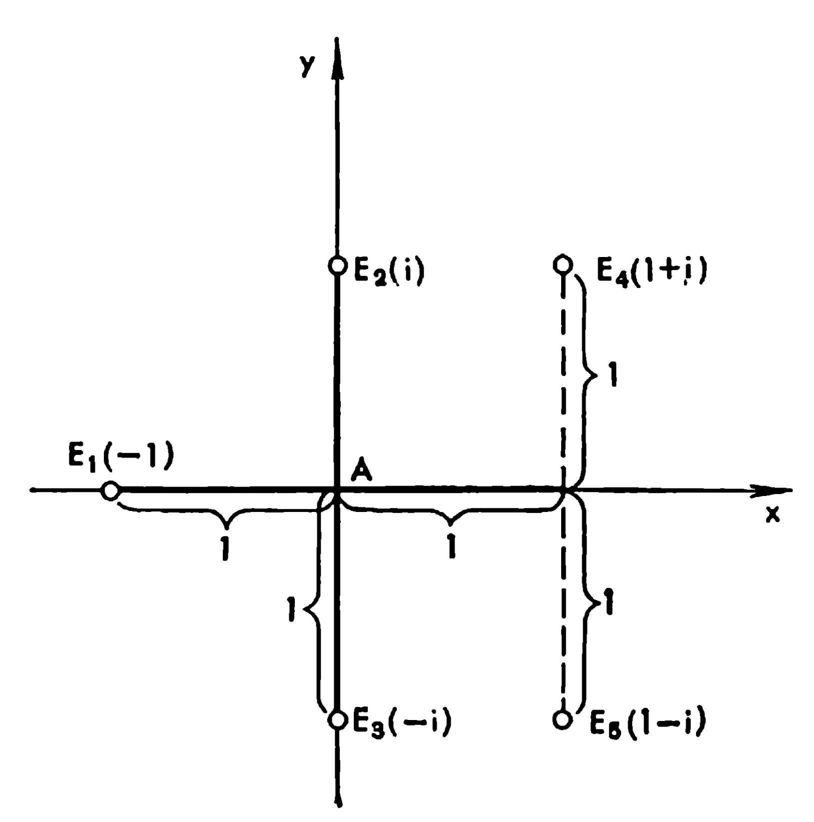


Fig. 17

même et le point E qui en est l'image. Par exemple, l'expression « point $1 + i$ » désignera le nombre $1 + i$ et le point E_4 qui le figure (fig. 17). Le contexte montrera lequel de ces sens il faudra donner à cette expression. Du reste, il vaut mieux s'habituer à ne pas réfléchir à ce sujet et à utiliser les deux sens comme équivalents.

15 Soit z un certain point. Si l'on ajoute à z un nombre a quelconque on obtient un nouveau point $z' = z + a$. Il est évident que l'on peut passer du point z au point z' par une *translation d'un vecteur* a, c'est-à-dire en déplaçant le point z dans le sens du vecteur a d'une distance égale à la longueur de ce vecteur (fig. 18). En choisissant convenablement a on peut obtenir n'importe quel déplacement du point z. Par exemple, si l'on doit déplacer z d'une unité dans le sens positif de l'axe Ax on prend $a = 1$; le point $z' = z + 1$ sera le point cherché. Si l'on doit déplacer z de deux unités dans le sens négatif de l'axe Ay on prend $a = -2i$; le point $z'' = z + (-2i) = z - 2i$ sera le point cherché (fig. 19).

Donc, l'addition $z' = z + a$ signifie géométriquement que le point z est déplacé d'un vecteur a.

16 Considérons la multiplication de z par un certain nombre $c \neq 0$. Pour multiplier z par c, il faut multiplier la longueur du vecteur AE (c'est-à-dire le nombre $|z|$) par le nombre $|c|$ et faire tourner le vecteur AE_1 obtenu d'un angle égal à $\arg c$ (fig. 20). La première opération ne change pas la direction du vecteur AE et peut modifier seulement sa longueur. Si $|c| < 1$, cette longueur diminuera, si $|c| > 1$, elle augmentera, si $c = 1$, elle ne changera pas. Appelons cette opération *dilatation* du vecteur AE de $|c|$ fois. Il faut entendre ici le mot « dilatation » dans un sens de convention ; en fait, il n'y aura dilatation que si $|c| > 1$, quand, par multiplication, la longueur du vecteur augmente de $|c|$ fois. Toutefois, nous pouvons également utiliser

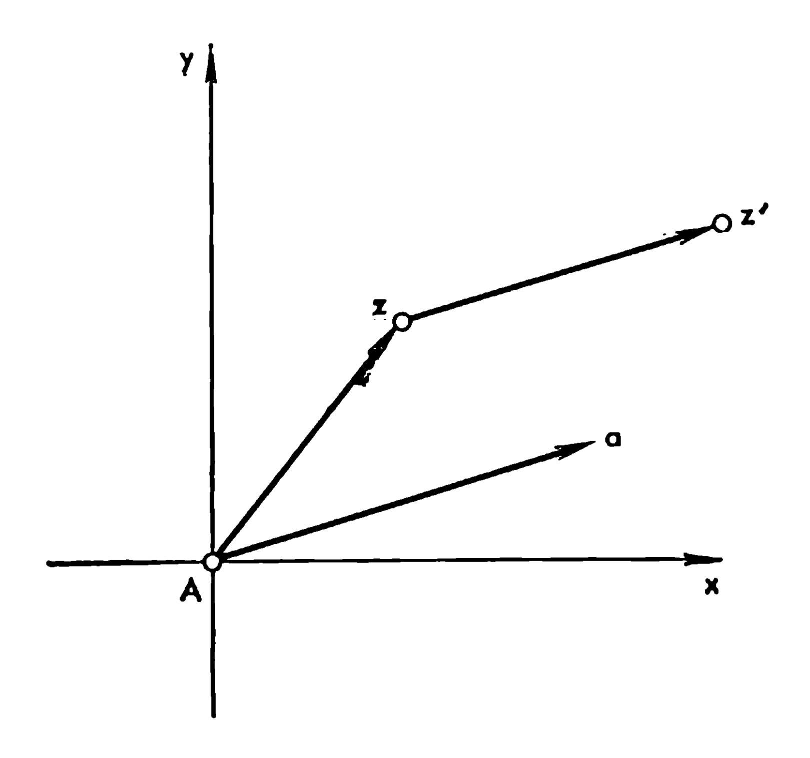


Fig. 18

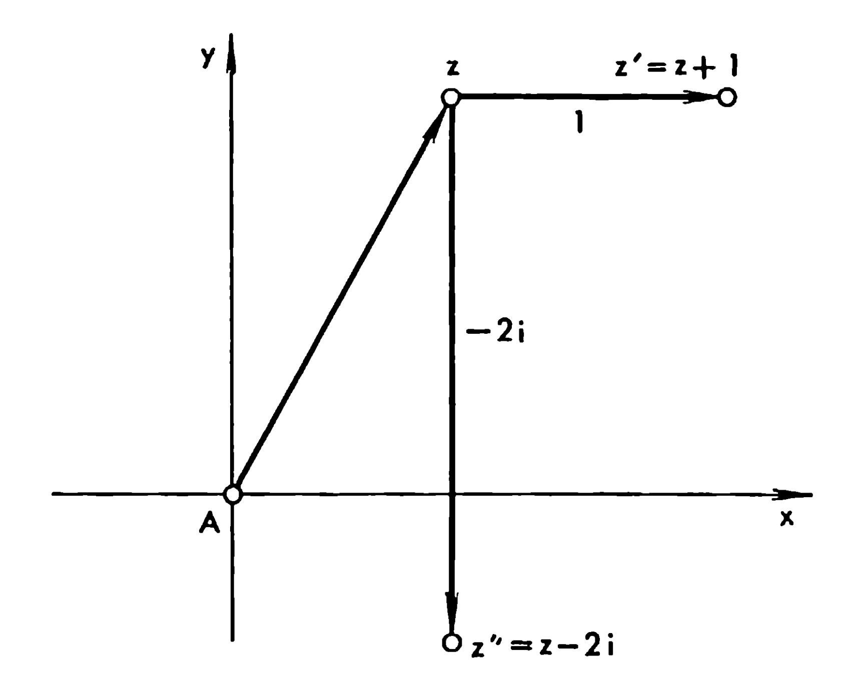


Fig. 19

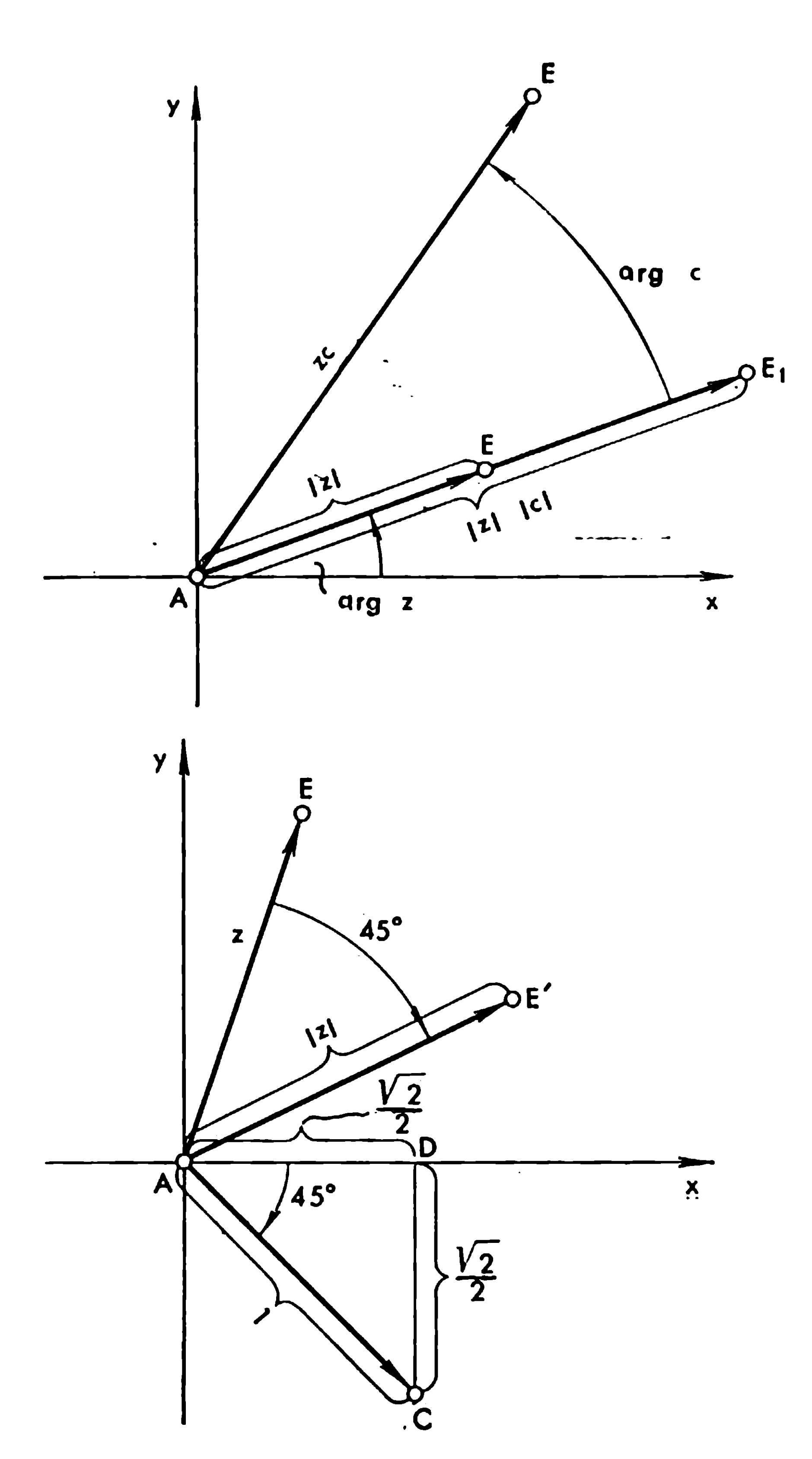

E
y
arg c
zc
E
E1
|z|
|z| |c|
A
arg z
x
y
E
z
45°
E′
|z|
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
D
A
x
45°
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
C

Fig. 20

Fig. 21

ce terme lorsque $|c| = 1$ (la longueur du vecteur AE reste invariable) et quand $|c| < 1$ (par multiplication, la longueur du vecteur AE diminue).

Si c est un nombre réel positif, $\arg c = 0°$. Dans ce cas, une rotation d'un angle $\arg c$ ne modifie pas le vecteur AE_1 trouvé par dilatation; par conséquent, le point E_1 représente le produit zc. On peut dire que la multiplication de z par un nombre c réel et positif signifie géométriquement la dilatation du vecteur AE (figurant z) de c fois. En faisant varier c, on peut obtenir différentes dilatations du vecteur AE. Ainsi, pour obtenir une dilatation de 2 fois, il faut multiplier z par 2; pour obtenir une dilatation de $\frac{2}{3}$ fois, il faut multiplier z par $\frac{2}{3}$.

Si le multiplicateur c n'est pas un nombre réel positif, $\arg c$ n'est pas égal à zéro. Dans ce cas, la multiplication de z par c ne se ramène pas simplement à la dilatation du vecteur AE, il faut encore faire tourner le vecteur dilué d'un angle $\arg c$ autour du point A. Par conséquent, dans le cas général, la multiplication $z \cdot c$ signifie une *dilatation* (de $|c|$ fois) et une *rotation* (d'un angle $\arg c$). Dans le cas particulier où la valeur absolue de c est égale à l'unité, la multiplication par c se ramène seulement à une rotation du vecteur AE autour du point A d'un angle $\arg c$. En choisissant convenablement c, on peut faire tourner AE de n'importe quel angle. Ainsi, par exemple, s'il faut faire tourner AE de 90° dans le sens positif (sens contraire aux aiguilles d'une montre) il suffit de multiplier z par i; en effet, $|i| = 1$ et $\arg 1 = 90°$. Pour faire tourner AE de 45° dans le sens négatif (sens des aiguilles d'une montre) il suffit de multiplier z par un nombre complexe c dont le module est égal à l'unité, et l'argument, à $-45°$. La figure 21 représentant le point C, image du nombre c, permet de trouver facilement ce nombre. Il est évident que les coordonnées du point C sont $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est pourquoi $c = \frac{\sqrt{2}}{2} -$

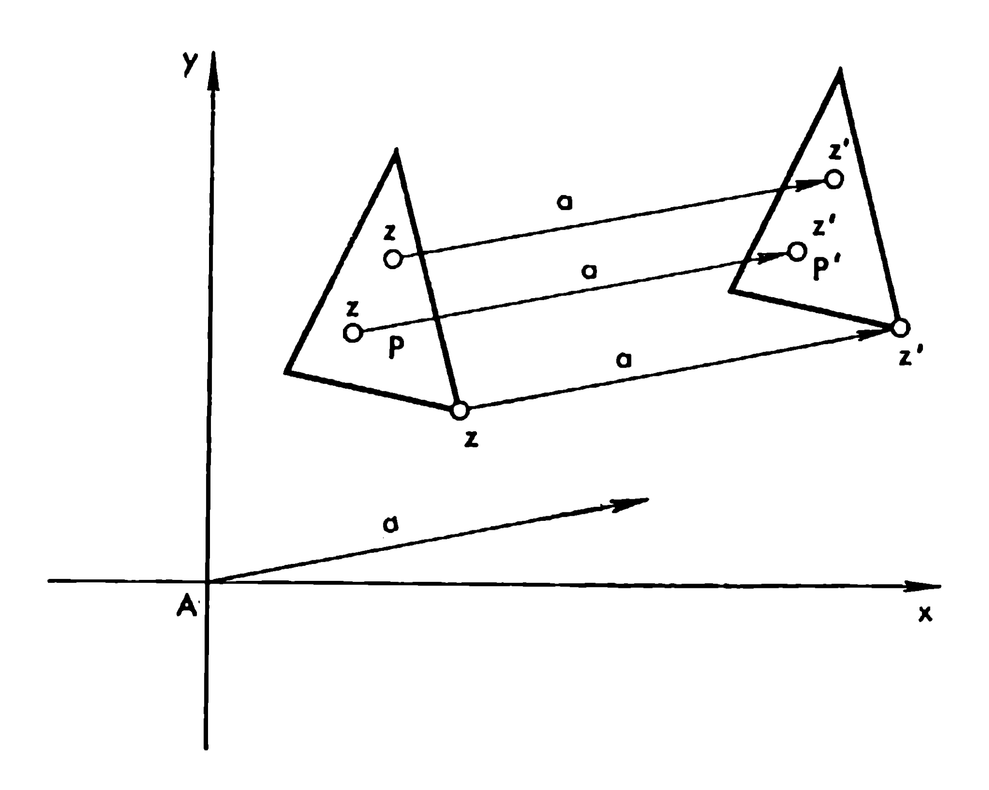


Fig. 22

$- i \frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc, la multiplication de z par $c = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ est équivalente à une rotation du vecteur AE (figurant z) d'un angle de 45° autour du point A dans le sens négatif.

17 Les formules $z' = z + a$ ou $z' = cz$ transforment, comme nous l'avons vu, le point z en un point z'. Considérons, non pas un point, mais une infinité de points z constituant une figure géométrique P quelconque (par exemple, un triangle; fig. 22). Si l'on applique à chaque point z la formule $z' = z + a$, on obtient à partir de l'ancien un nouveau point z' déplacé d'un vecteur a. Tous ces points déplacés constituent une nouvelle figure P'. Il est évident qu'on peut l'obtenir, en déplaçant la figure P tout entière d'un vecteur a. Donc, à l'aide de la formule $z' = z + a$, on peut transformer, non seulement un point, mais aussi une figure tout entière (un ensemble de points). Cette trans-

formation se ramène à déplacer la figure d'un vecteur a. Evidemment, la nouvelle figure est égale (congruente) à la précédente.

18 On peut appliquer à chaque point z de la figure P la formule $z' = cz$. Si c est un nombre réel positif, chaque point z de la figure P se tranforme en un nouveau point z' situé sur le même rayon issu de A sur lequel se trouve le point z, de façon que le rapport $\frac{|z'|}{|z|}$ (c'est-à-dire le rapport des distances de z' et z au point A) soit égal à c. En géométrie, une telle transformation s'appelle une *homothétie*, les points z' et z, des *points homothétiques*, le point A, *centre d'homothétie* et le nombre c, *rapport d'homothétie*.

L'homothétie a pour résultat que l'ensemble de tous les points de la figure P passent dans un certain ensemble nouveau de points constituant la figure P' (fig. 23). Cette figure est *homothétique* par rapport à la figure P donnée. On voit aisément que lorsque P est un polygone (par exemple, un triangle) la figure homothétique P' est aussi un polygone qui est semblable au polygone P. Pour le démontrer, il suffit de considérer comment se transforment, dans une homothétie, les points situés sur un des côtés BC du polygone P (fig. 23).

Si B se transforme en B', C en C', en réunissant B' et C' par un segment de droite, on trouve que les triangles ABC et $AB'C'$ sont semblables $\Big($l'angle A est commun et les côtés qui le comprennent sont proportionnels: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = c\Big)$. Il en découle que le côté $B'C'$ est parallèle à BC et que $\frac{B'C'}{BC} = c$. Soit K un point situé sur BC ; le rayon AK rencontre alors $B'C'$ en un certain point K', les triangles AKC et $AK'C'$ sont de nouveau semblables et, par conséquent, $\frac{AK'}{AK} = \frac{AC'}{AC} = c$. C'est pourquoi le point K' est l'homothétique

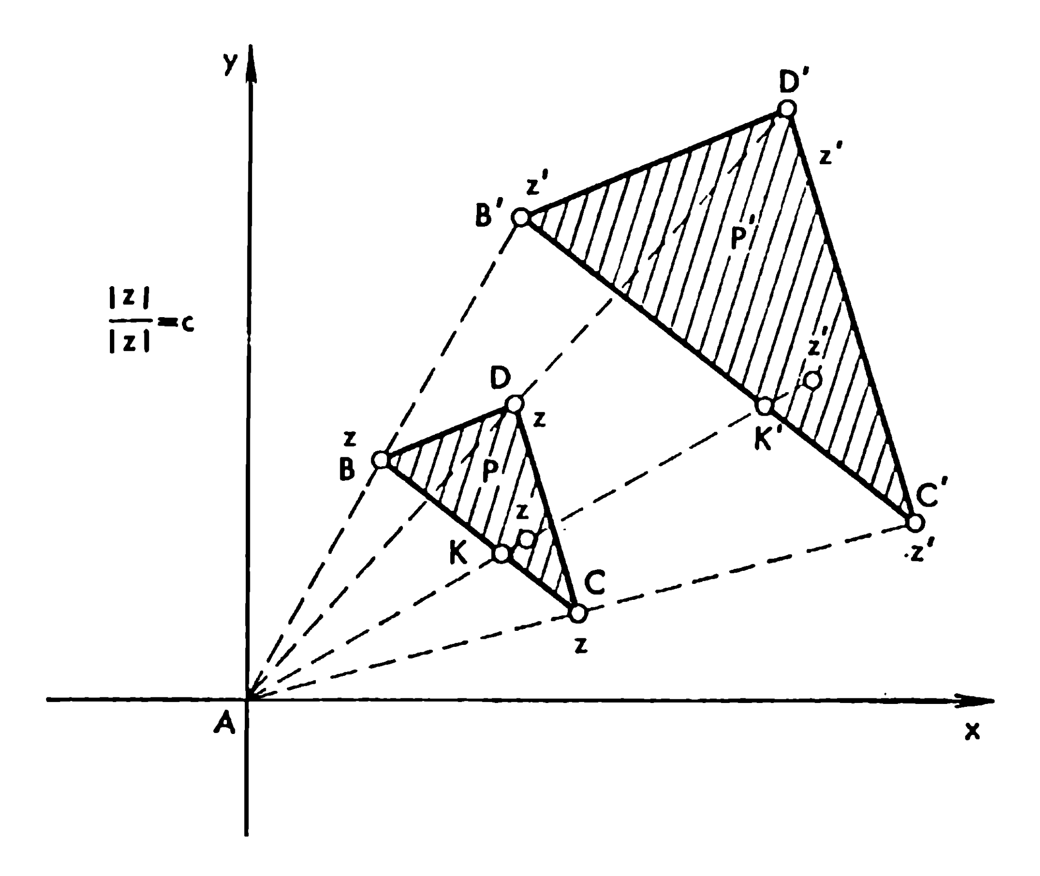


Fig. 23

du point K (suivant le centre A pour un rapport d'homothétie égal à c). Nous en concluons que tous les points situés sur le côté BC se transforment par homothétie en des points situés sur le côté $B'C'$; de plus, chaque point sur $B'C'$ sera l'homothétique d'un des points situés sur BC. Donc, tout le segment $B'C'$ sera homothétique du segment BC. En répétant ce raisonnement pour tous les côtés du polygone P, nous trouverons que tous se transforment en côtés d'un nouveau polygone P', que les côtés correspondants sont parallèles l'un à l'autre et que le rapport de leurs longueurs est égal à un même nombre c :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'B'}{DB} = c.$$

C'est ce qui démontre la similitude des figures homothétiques P et P'.

Ainsi, au moyen de la formule $z' = cz$ (c étant un nombre réel positif) on peut transformer non seulement un seul point, mais une figure P toute entière. Cette transformation est une homothétie de centre A et de rapport d'homothétie égal à c. Dans le cas où P est un polygone, la figure transformée P' est également un polygone, qui est semblable à P.

19 Supposons maintenant que, dans la formule $z' = zc$, c ne soit pas un nombre positif. Admettons d'abord que $|c| = 1$. Dans ce cas, toute l'opération de la multiplication se ramène à une rotation du vecteur Az autour du point A d'un angle égal à l'argument de z. Si l'on applique cette opération à chaque point z de la figure P, la figure P tout entière se trouvera tournée d'un angle $\arg c$ autour du point A. Par conséquent, au moyen de la formule $z' = cz$, où $|c| = 1$, toute figure P se transforme en figure P', obtenue à partir de P par rotation autour du point A d'un angle $\arg c$. Prenons, par exemple $c = i$; étant donné que $\arg i = 90°$, la transformation $z' = iz$ se ramène à une rotation de 90° de la figure autour du point A. La figure 24 représente ce que devient un triangle dans cette transformation.

Si, dans la formule $z' = cz$ on n'introduit pas la condition $|c| = 1$, mais que l'on considère seulement c comme un nombre complexe quelconque (non positif et différent de zéro), la transformation correspondante de la figure P pourra être effectuée en deux étapes. On procède d'abord à une dilatation de $|c|$ fois, ce qui transforme la figure P en une figure homothétique P_1, puis on fait tourner P_1 autour du point A d'un angle $\arg c$.

La figure 25 montre ce que devient le triangle P par la transformation $z' = \frac{i}{2} z$ $\left(\text{ici } \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2} \text{ et } \arg \frac{i}{2} = 90°\right)$.

20 Dans les formules $z' = z + a$ et $z' = cz$, on peut considérer z comme une *variable indépendante* et z' comme une *fonction*. Ce sont des *fonctions* élémentaires

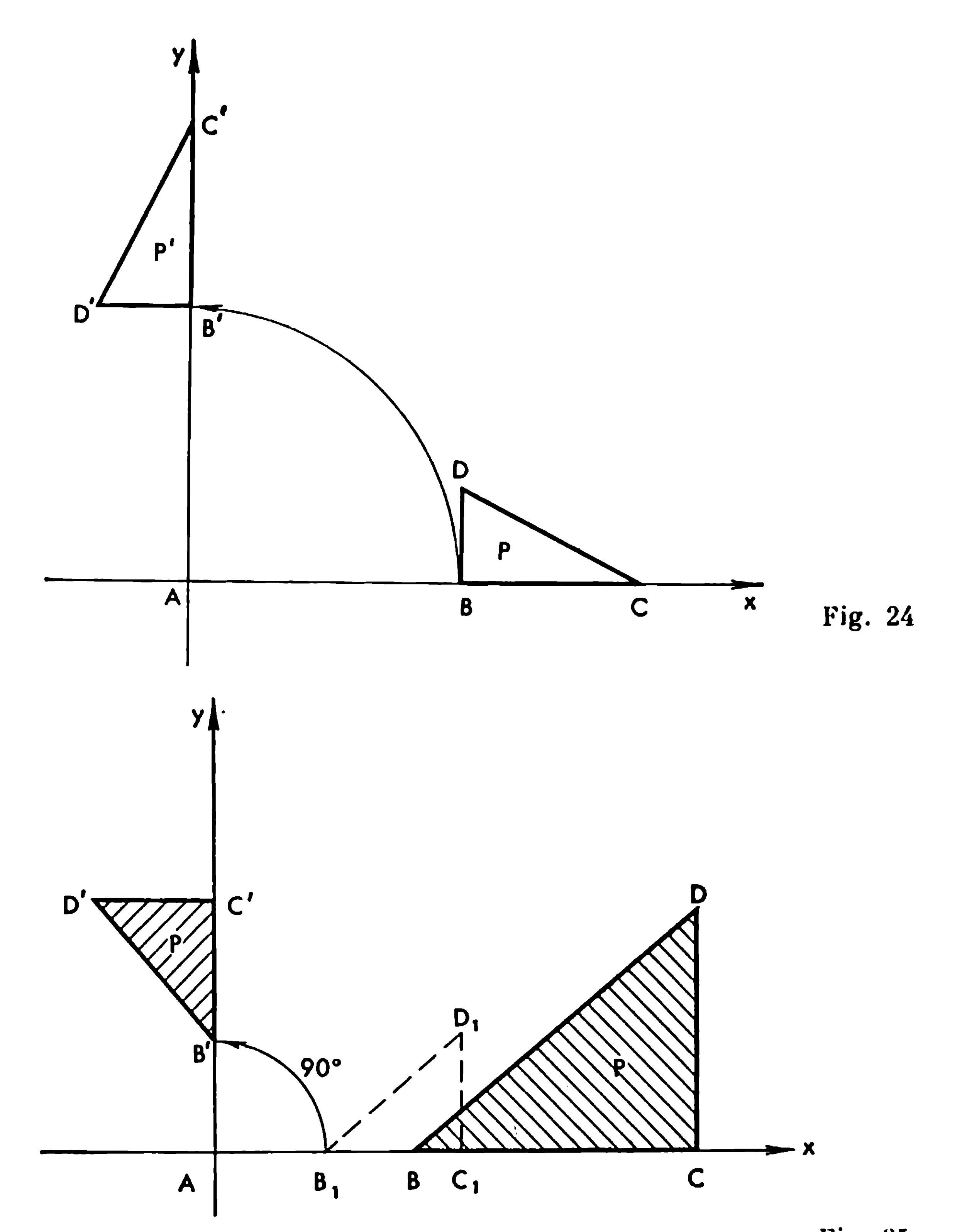


Fig. 24

Fig. 25

d'une variable complexe z. En effectuant sur z et des nombres complexes constants quelconques les opérations d'addition, soustraction, multiplication, division, ainsi que d'élévation à une puissance (nous regardons cette dernière comme une multiplication répétée), nous obtiendrons d'autres fonctions de z, par exemple :

$$z' = \frac{1}{z} \text{ ou } z' = z^2 + cz + d, \text{ ou } z' = \frac{z-a}{z-b}, \text{ etc.}$$

Toutes ces fonctions d'une variable complexe sont dites *rationnelles*; elles sont appelées ainsi parce que les opérations au moyen desquelles ces fonctions sont définies (addition, soustraction, multiplication et division) sont elles-mêmes dites *rationnelles.* Toutes les fonctions de la variable complexe ne se réduisent pas aux fonctions rationnelles; on peut, par exemple, définir et étudier des fonctions de la forme $z' = \sqrt[n]{z}$, $z' = a^z$, $z' = \sin z$, etc. Toutefois, nous nous contenterons, dans ce livre, des fonctions rationnelles et même des plus élémentaires d'entre elles.

21 Nous avons vu qu'aux fonctions $z' = z + a$ et $z'' = cz$ correspondent des transformations géométriques déterminées des figures sur un plan. Précisément, si la variable z parcourt les points de la figure P, la fonction $z' = z + a$ parcourt les points de la figure P' obtenue à partir de P par translation d'un vecteur a et la fonction $z' = cz$ parcourt les points de la figure P'' obtenue par transformation d'homothétie de rapport $|c|$ et rotation autour du point A d'un angle $\arg c$. Par conséquent, on peut dire que la fonction $z' = z + a$ effectue une transformation de translation et la fonction $z' = cz$, une transformation d'homothétie et de rotation (si c est un nombre réel positif, la chose se ramène à une homothétie seulement; si $|c| = 1$, mais $c \neq 1$, à une rotation seulement). La question se pose de savoir ce qu'on peut dire des transformations effectuées par d'autres fonctions d'une variable complexe, en particulier, par des

fonctions rationnelles. Nous nous occuperons de cette question aux dernières pages de ce livre. Et pour que le lecteur comprenne qu'une telle occupation n'est pas oiseuse, nous lui dirons ici déjà que les transformations effectuées par des fonctions rationnelles d'une variable complexe, se distinguant par la surprenante diversité et la richesse de leurs propriétés géométriques, ont, cependant, quelque chose de commun. Précisément, bien que dans ces transformations la grandeur et l'aspect de la figure sont, il est vrai, modifiés, les valeurs des angles entre n'importe quelles lignes de la figure envisagée restent invariables [1]).

Dans les cas particuliers des fonctions $z' = z + a$ ou $z' = cz$, l'invariabilité des angles dans les figures transformées découle directement du fait qu'il s'agit ici de transformation de translation, d'homothétie ou de rotation. Il est remarquable que le même phénomène s'observe également dans les transformations au moyen de toute fonction rationnelle d'une variable complexe, ainsi que pour de nombreuses autres fonctions plus générales et plus compliquées d'une variable complexe, dites analytiques. Mais nous n'avons pas la possibilité de parler de ces dernières dans le cadre de ce petit livre.

22 Les transformations géométriques, dans lesquelles reste invariable la valeur des angles entre deux lignes, n'importe lesquelles, contenues dans la figure transformée, s'appellent *transformations conformes*; on les appelle plus souvent encore *représentations conformes.*

Des exemples de représentations conformes sont données par la translation, l'homothétie et la rotation examinées plus haut. Nous en donnerons d'autres plus bas. Pour l'ins-

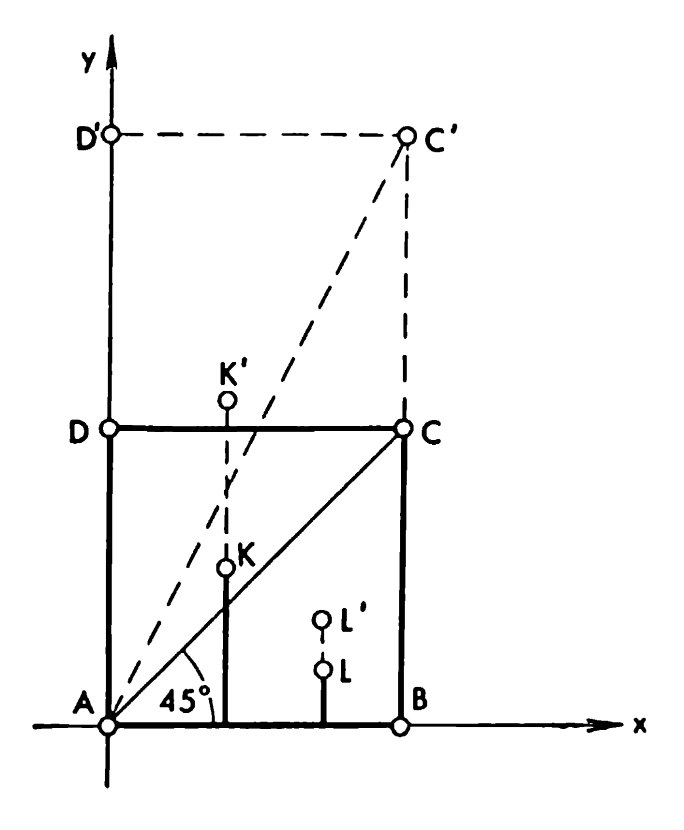
---

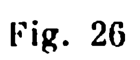
[1]) A strictement parler, il peut y avoir certains points tels que les angles ayant leur sommet en ces points se modifient et s'accroissent de 2, 3 fois ou d'une manière générale d'un nombre entier de fois. Mais de tels points font exception à la règle générale.

tant, nous allons montrer ce que signifie la condition, entrant dans la définition d'une représentation conforme, de l'invariabilité des angles entre deux lignes, *n'importe lesquelles*, contenues dans la figure envisagée. Considérons le carré $ABCD$ attenant aux axes Ax et Ay (fig. 26). Transformons-le en une autre figure de façon que l'abscisse x de chaque point reste inchangée, tandis que l'ordonnée y soit doublée. Le point K sera alors transformé en K' et L en L'. Si tous les points du carré subissent la même transformation, il est évident que le carré $ABCD$ se transformera en rectangle $ABC'D'$ de même base et de hauteur double. Le côté AB se transforme en lui-même, (tous les points restent à leur place, car leurs ordonnées sont égales à zéro et le restent après avoir été multipliées par 2), AD se transforme en AD', DC en $D'C'$ et BC en BC'. Naturellement, les angles entre les côtés restent des angles droits, c'est-à-dire qu'ils ne changent pas. Examinons, cependant, l'angle BAC entre le côté AB et la diagonale AC de notre carré (fig. 26) ; cet angle est égal à 45°. Par suite de la transformation, le côté AB reste à sa place, mais la ligne AC passe à la ligne AC' (pourquoi ?). Par conséquent, l'angle BAC se transforme en un autre angle, plus grand, BAC', c'est-à-dire qu'il ne reste pas inchangé. Si, au lieu de l'angle BAC, on prend l'angle PQC ayant son sommet en un autre point quelconque Q du carré $ABCD$ (fig. 27), il sera facile de montrer que cet angle se modifie aussi dans la transformation considérée.

La conclusion est la suivante : bien que les angles du carré $ABCD$ n'aient pas changé au cours de cette transformation (ils étaient et restent droits), la transformation n'est pourtant pas conforme car pour *tout point* appartenant à $ABCD$ on peut montrer un angle ayant son sommet sur ce point qui *varie* (augmente) au cours de cette transformation.

23 Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'expliquer au lecteur ce que l'on entend par angles entre deux lignes courbes QR et QP se coupant en un certain point Q (fig. 28).




Fig. 26

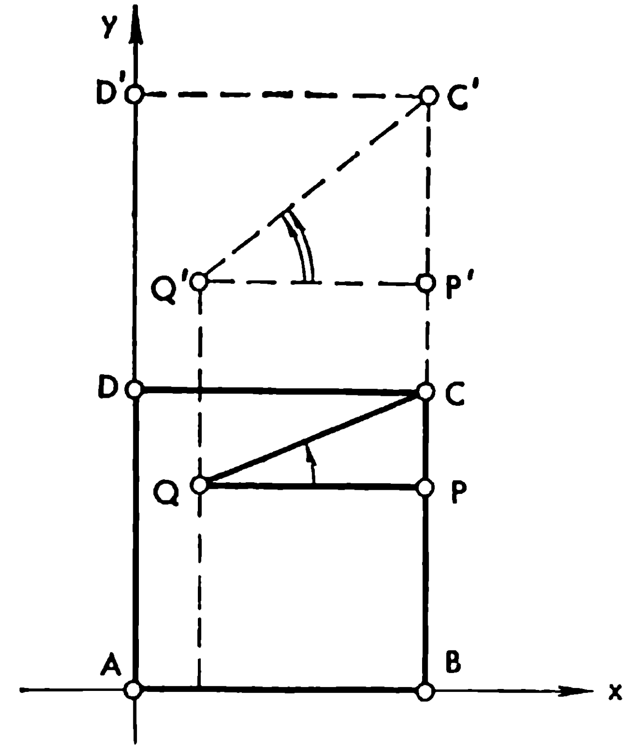


Fig. 27

Prenons sur la courbe QP un point Q_1 quelconque, distinct de Q, et menons la sécante QQ_1. Exactement de même, prenons sur la courbe QR un point Q_2 distinct de Q et menons la sécante QQ_2. La valeur de l'angle Q_1QQ_2 peut être considérée comme une valeur approchée de l'angle curviligne PQR. Plus les points Q_1 et Q_2 se rapprocheront du point Q, plus les sécantes se serreront contre les courbes QR et QP au voisinage du point Q. C'est pourquoi l'angle Q_1QQ_2 peut être aussi considéré comme une valeur de mieux en mieux approchée de la valeur de l'angle formé par les courbes au point Q. Si Q_1 se déplace sur la courbe PQ et Q_2 sur la courbe QR, en se rapprochant indéfiniment de Q, les sécantes QQ_1 et QQ_2 tourneront autour du point Q en se rapprochant des positions limites QT_1 et QT_2. Les rayons QT_1 et QT_2 se serrent contre les courbes au voisinage de ce point plus étroitement que tout autre rayon passant par Q. Ce sont les *tangentes aux courbes QP et QR* et l'angle T_1QT_2 qu'elles forment est pris comme mesure de l'angle au point Q entre les courbes QP et QR. Donc, l'*angle entre deux courbes se coupant en un certain point est l'angle formé par les tangentes menées aux courbes en ce point.*

Cette définition s'applique également dans le cas d'un angle formé au point Q par une certaine courbe QP et une droite QR (fig. 29). Soit QT_1 la tangente à QP au point Q. Pour pouvoir se servir de la définition, il faut aussi substituer à la droite QR la tangente à cette droite. On comprend aisément que la tangente à la droite QR coïncide avec cette droite même. En effet, pour obtenir une sécante, il faut prendre sur QR un point Q_1 distinct de Q et mener une droite passant par Q et Q_1. On voit aussitôt que ce sera la droite QR elle-même. Si Q_1 se rapproche de Q, la sécante trouvée reste la même. C'est pourquoi la tangente, position limite d'une sécante, est de nouveau la droite QR. Par conséquent, l'angle entre la courbe QP et la droite QR doit être compris comme l'angle entre la tangente QT_1 à la courbe QP au point Q et la droite QR elle-même. Il peut se produire que

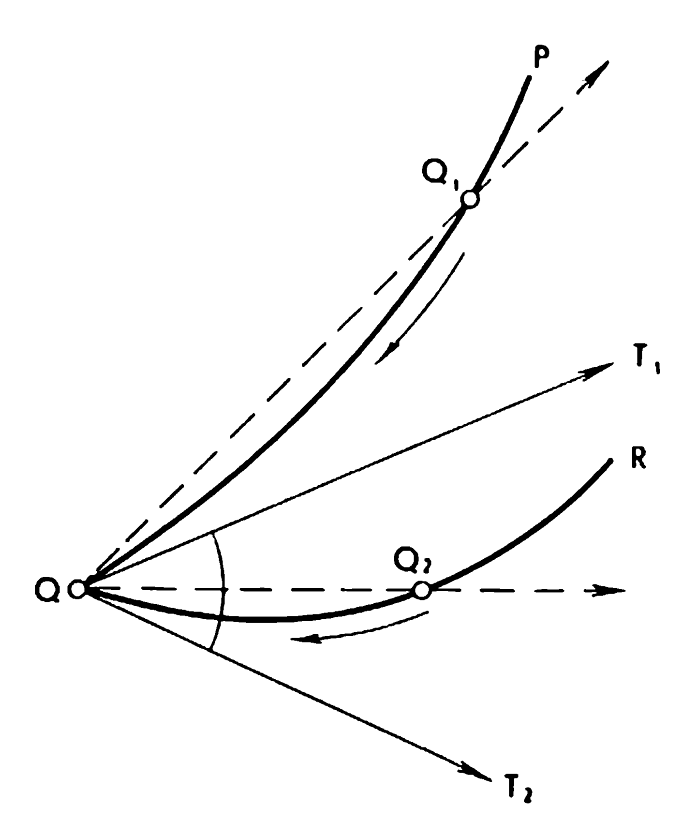


Fig. 28

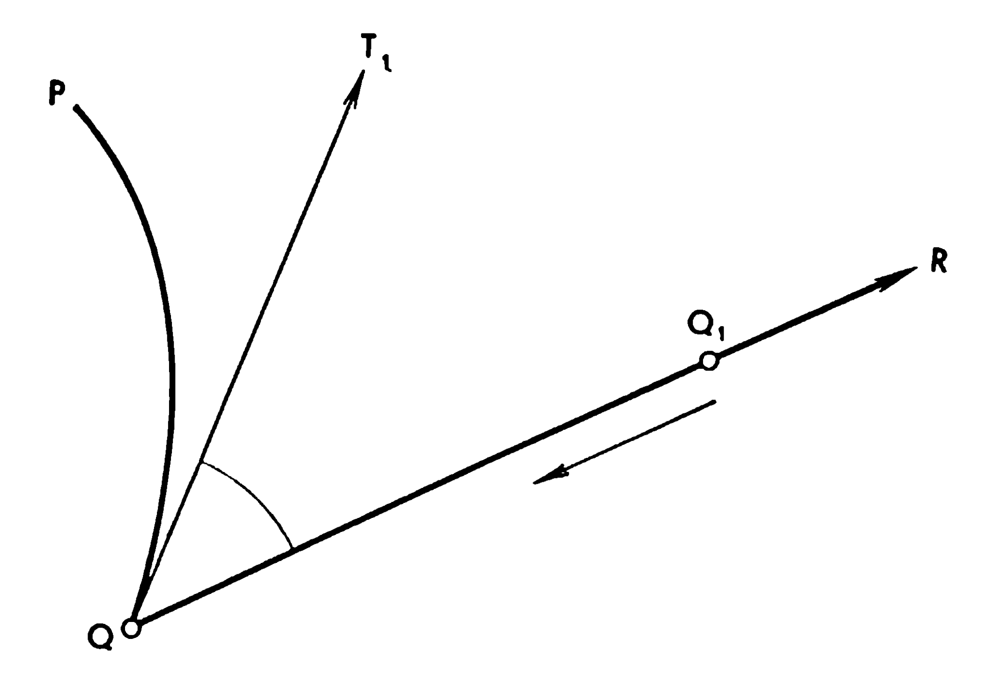


Fig. 29

QR soit la tangente à QP (c'est-à-dire qu'elle coïncide avec QT_1) ; l'angle entre QR et QP devient alors égal à zéro. Par conséquent, l'angle au point Q entre la courbe et sa tangente en ce point est égal à zéro.

24 Les représentations conformes ont de nombreuses applications. Par exemple, elles sont utilisées en cartographie pour dresser des cartes géographiques.

Toute carte géographique représente une région de la surface terrestre sur un plan (une feuille de papier). Dans une telle représentation, les contours des continents, des mers et des océans subissent une altération plus ou moins grande. Le lecteur se rendra facilement compte qu'il est impossible de redresser et d'étendre sur un plan sans dilatation ou compression, sans ruptures ou plis une partie de surface sphérique (une partie de balle de ping-pong brisée, par exemple). Pour la même raison, il est impossible de représenter sur un plan, sans la déformer, une partie de la surface terrestre (que l'on peut considérer comme sphérique), c'est-à-dire de dresser une carte. Cependant, il s'avère que l'on peut dresser une carte sans modifier la valeur des angles entre différentes lignes sur la surface de la Terre.

Supposons que nous ayons à faire une carte de l'hémisphère nord, sur laquelle tous les angles entre différentes directions sur la surface terrestre soient représentées grandeur nature. Pour se rendre compte démonstrativement comment on peut le faire, imaginons-nous un grand globe d'une matière transparente quelconque, en verre par exemple, peinte de couleurs opaques, de façon que seuls les contours des continents, des pays et des mers de l'hémisphère boréal, ainsi que le réseau des méridiens et des parallèles ne soient pas recouverts de peinture et restent, par conséquent, transparents. De plus, on peut ne pas peindre les côtés (curvilignes) d'un angle PQR quelconque ayant son sommet en n'importe quel point de l'hémisphère nord. Si, au pôle sud du globe, on fixe en la soudant une ampoule électrique

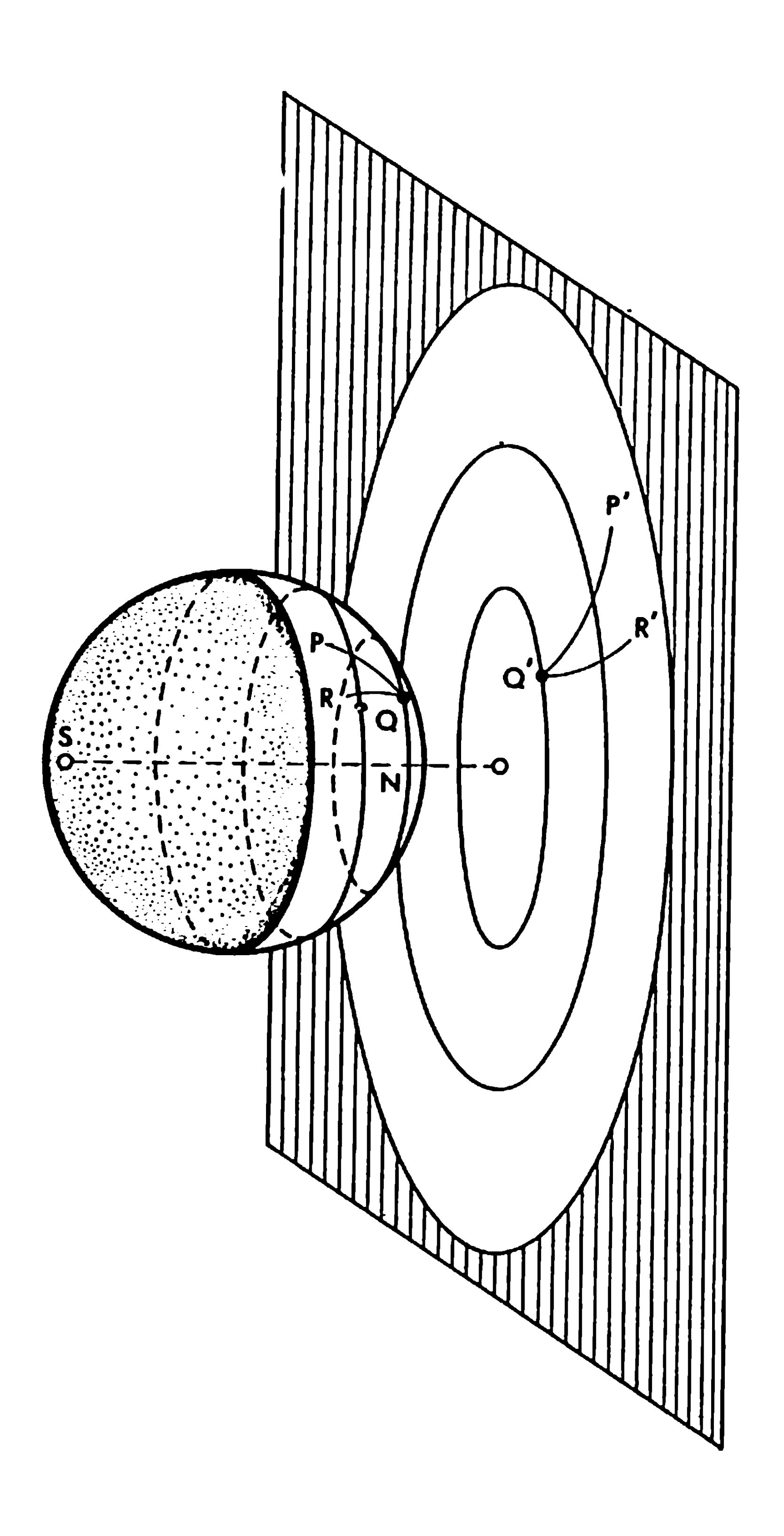


Fig. 30

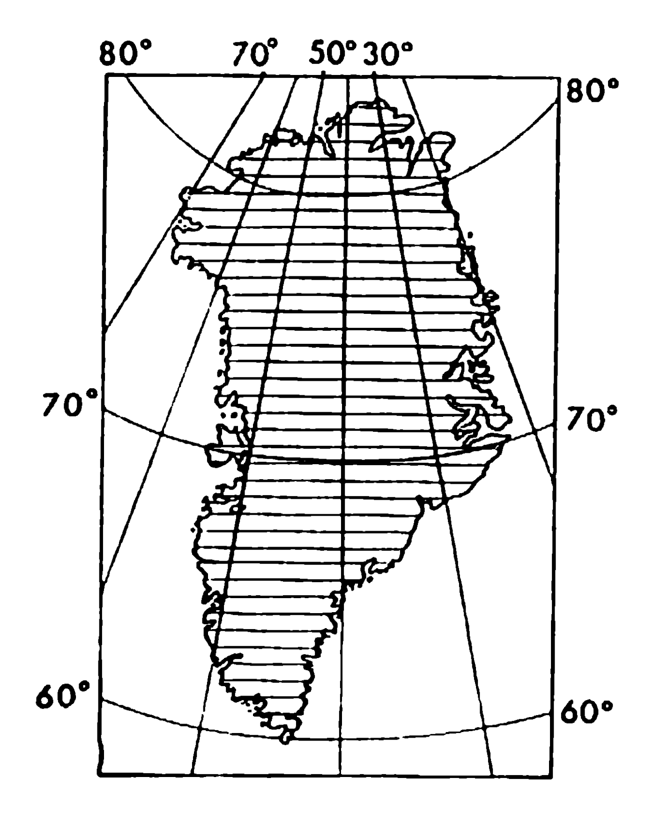
petite mais brillante et si on place devant le globe un écran perpendiculairement à son axe, dans une chambre noire nous verrons sur l'écran la carte des contours de l'hémisphère nord (fig. 30). On peut démontrer que sur une telle carte (appelée carte en *projection stéréographique*) tous les angles entre n'importe quelles lignes sur le globe dans l'hémisphère nord sont représentés grandeur nature. En particulier, cela est vrai pour l'angle PQR.

25 Nous avons relaté plus haut comment on peut obtenir la carte de l'hémisphère nord en conservant la grandeur naturelle de tous les angles. Si la source lumineuse (l'ampoule électrique) d'où partent les rayons de projection, est située, non pas au pôle sud, mais au pôle nord, on obtiendra de la même façon la carte de l'hémisphère sud en conservant à tous les angles leur grandeur naturelle. Chacune des cartes obtenues de cette façon représente une certaine figure plane ; si on la soumet à une représentation conforme, elle se transforme en une nouvelle figure que l'on peut aussi considérer comme une carte géographique. Etant donné que, dans une représentation conforme, les angles ne sont pas modifiés, sur la nouvelle carte les grandeurs naturelles des angles entre les directions sur la surface de la Terre seront conservées. La figure 31, à gauche, représente la carte du Groenland en projection stéréographique ; à droite, la carte obtenue à partir de la première en appliquant à tous ses points une transformation d'après la formule :

$$z' = \log_e |z| + i \arg z.$$

Ici, en qualité de base de logarithmes on prend le nombre népérien $e = 2{,}71828\ldots$, et $\arg z$ est mesuré, non pas en degrés, mais en radians.

Nul doute, cette formule semble artificielle et compliquée. Nous n'avons pas la possibilité de l'examiner ici en détail et de vérifier que la transformation faite avec son aide est réellement conforme. Disons seulement que la carte



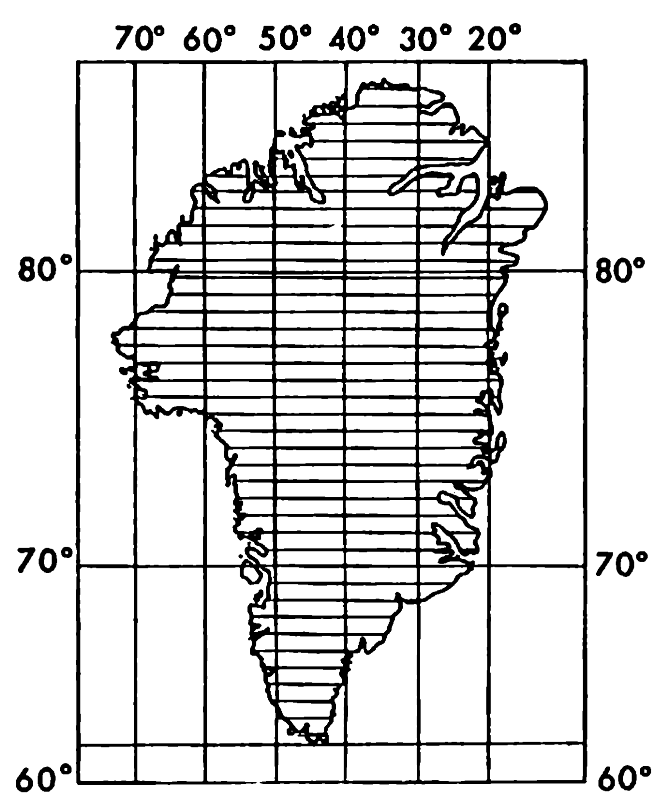


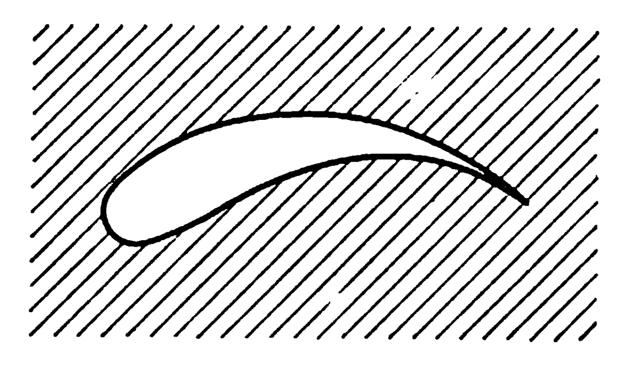
Fig. 31

obtenue par cette transformation a été dressée, il y a environ 400 ans, par le savant hollandais Mercator. Depuis, elle a été largement utilisée dans la navigation. Ses avantages sur la carte en projection stéréographique est qu'ici, non seulement les méridiens, mais aussi les parallèles sont représentés par des lignes droites; bien plus, tous les chemins sur la surface de la Terre le long desquels l'aiguille de la boussole garde une orientation invariable (loxodromies) sont ici également représentés par des lignes droites.

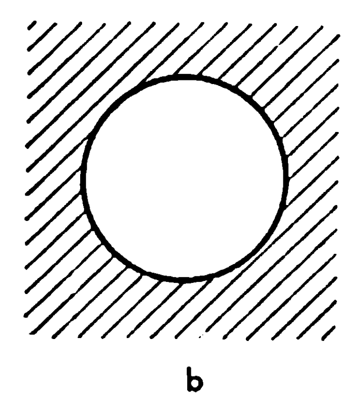
26 Les applications les plus importantes des représentations conformes se rattachent aux problèmes de physique et de mécanique. Dans de nombreux problèmes où il s'agit, par exemple, d'un potentiel électrique en des points de l'espace entourant un condensateur chargé, ou de la température autour d'un corps chauffé, des vitesses des particules de liquide ou de gaz dans un flux se mouvant dans un certain canal en contournant un obstacle quelconque, etc. il faut savoir calculer le potentiel, la température, les vitesses, etc. De tels problèmes peuvent être résolus sans grande difficulté quand les corps qui y figurent sont d'une forme simple (des plaques planes, des cylindres ronds, par exemple). Pourtant, il faut savoir faire les calculs dans de nombreux autres cas. Par exemple, pour faire les calculs d'un avion qu'on veut construire, il faut savoir calculer les vitesses des particules d'air dans le flux qui s'écoule autour de l'aile [1]).

L'aile d'avion en coupe transversale (profil d'aile) a l'aspect représenté sur la figure 32,*a*. Cependant, le calcul des vitesses se fait avec une simplicité particulière quand la coupe transversale du corps contourné est un cercle

[1]) Au cours du vol de l'avion, il est évident que se meuvent les particules d'air et l'aile même. Toutefois, en s'appuyant sur les lois de la mécanique, on peut ramener toute la recherche au cas où l'aile est immobile et qu'un flux d'air se lance sur elle et la contourne.



a



b

Fig. 32

(c'est-à-dire quand le corps même est un cylindre) (fig. 32,*b*).

Or, il s'avère que pour ramener le problème des vitesses des particules du flux d'air contournant l'aile de l'avion au problème plus simple de l'écoulement autour d'un cylindre, il suffit de transformer de façon conforme la figure hachurée de la fig. 32,*a* (*extérieur du profil d'aile*) en la figure hachurée sur la fig. 32,*b* (*extérieur d'un cercle*). Cette transformation se fait au moyen d'une certaine fonction de variable complexe. La connaissance de cette fonction permet de passer des vitesses dans un flux contournant un cylindre rond aux vitesses dans un flux s'écoulant autour d'une aile d'avion et, par conséquent, de résoudre complètement le problème posé.

D'une façon analogue, une représentation conforme permet de ramener la résolution du problème du calcul d'un

potentiel électrique et des températures au cas d'un corps de forme arbitraire (de n'importe quel profil en coupe) aux cas élémentaires où le problème est déjà résolu. Le passage inverse à l'espace entourant initialement les corps électrisés (ou chauffés) donnés est obtenu à l'aide de la même fonction de variable complexe par laquelle est réalisée la représentation conforme.

27 Tout ce qui a été dit ci-dessus sur l'application de la représentation conforme aux problèmes de cartographie, de mécanique et de physique ne s'est accompagné d'aucune démonstration. Nous ne pouvons pas donner les démonstrations dans ce petit livre, car, pour les comprendre, il faudrait que le lecteur ait des connaissances que seules les écoles supérieures peuvent fournir.

Jusqu'à la fin de notre livre, nous nous occuperons de fonctions rationnelles élémentaires au moyen desquelles on peut accomplir certaines représentations conformes. Voici les fonctions dont il s'agit: 1) $z' = \frac{z-a}{z-b}$ (*fonction homographique*); 2) $z' = z^2$; 3) $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. La dernière porte le nom du célèbre savant russe Nicolaï Egorovitch Joukovski (1847-1921) que Lénine a appelé justement « père de l'aviation russe ». Cette fonction est dite fonction de Joukovski, car celui-ci l'a appliquée avec succès à la résolution de certains problèmes de la théorie de l'avion; il a montré, en particulier, comment on pouvait, au moyen de cette fonction, obtenir certains profils d'aile d'avion présentant une importance théorique et pratique.

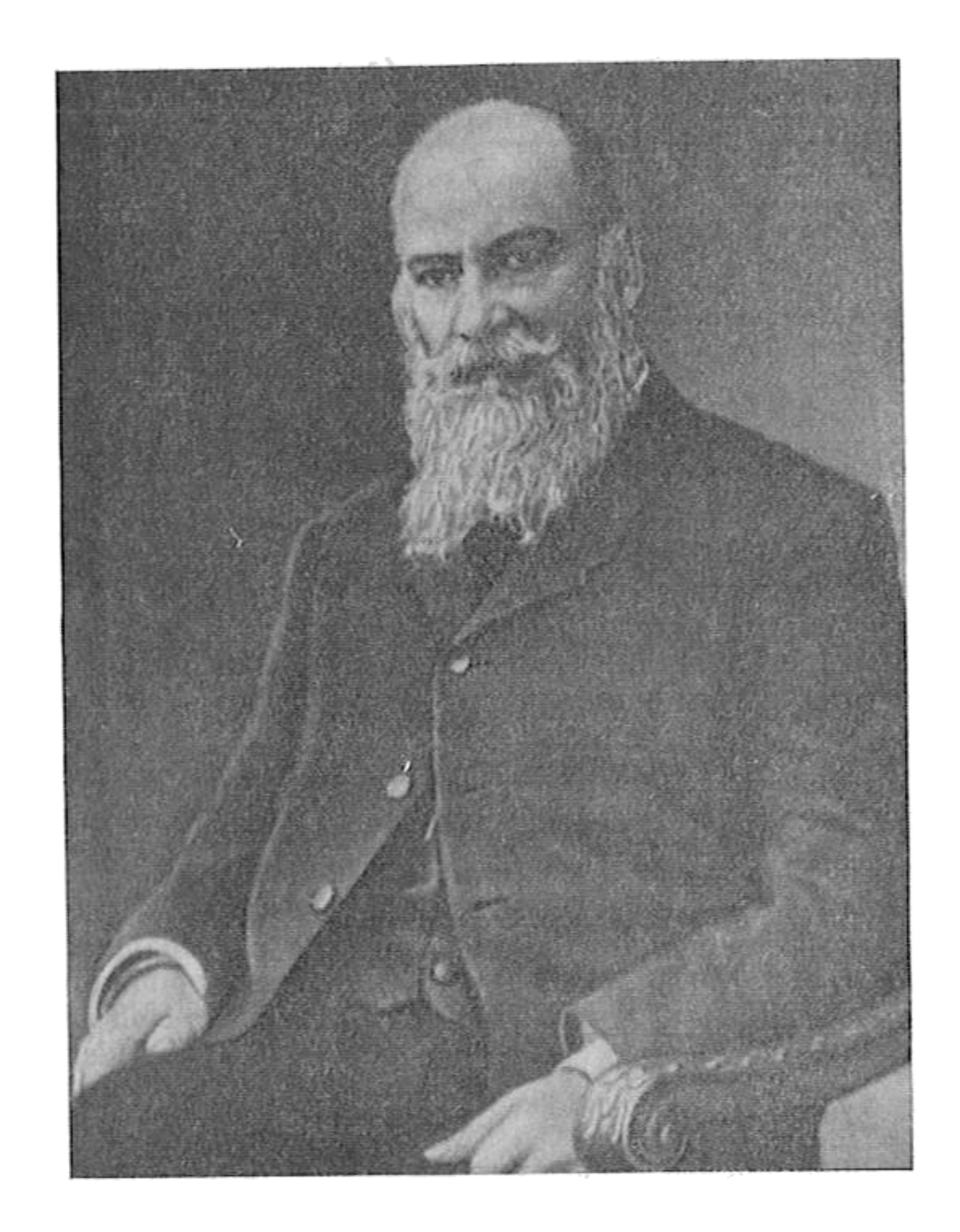
Nous reviendrons sur l'application de la fonction de Joukovski.

28 Commençons par la fonction homographique $z' = \frac{z-a}{z-b}$. Ici a et b sont des nombres complexes non égaux entre eux. Montrons qu'au moyen de cette fonction, tout arc PLQ

de la circonférence réunissant les points a et b se transforme en un certain rayon rectiligne $P'L'$ issu de l'origine des coordonnées, de façon que l'angle entre le sens positif de l'axe réel et ce rayon soit égal à l'angle entre la direction de baN et la tangente à l'arc de circonférence au point a (fig. 33).

Supposons que le point z soit situé sur l'arc PLQ (fig. 33, à gauche) ; démontrons que son image (c'est-à-dire le point correspondant $z' = \frac{z-a}{z-b}$) doit se trouver sur le rayon $P'L'$ (fig. 33, à droite). Pour construire le vecteur z', il faut connaître sa longueur ($|z'|$) et l'angle d'inclinaison sur la partie positive de l'axe réel ($\arg z'$). Mais z' est le quotient des nombres complexes $z - a$ et $z - b$, représentés par les vecteurs PR et QR. C'est pourquoi $|z'| = \frac{|z-a|}{|z-b|}$ et $\arg z'$ est égal à l'angle SPR (le vecteur PS a la même longueur et le même sens que QR) mesuré dans le sens de PS vers PR. Il est évident que $\widehat{SPR} = \widehat{QRP}$ et, par conséquent, il est mesuré par la moitié de l'arc QMP. L'angle NPT est mesuré aussi par la moitié du même arc. C'est pourquoi $\arg z' = \widehat{SPR} = \widehat{QRP} = \widehat{NPT} = \varphi$. Donc, pour toute position des points z sur l'arc PLQ, les points correspondants $z' = \frac{z-a}{z-b}$ ont le même argument φ. Or, ceci signifie que tous ces points sont situés sur le même rayon $P'L'$ incliné sur la partie positive de l'axe réel sous un angle φ.

Cette déduction est valable également dans le cas où PLQ n'est pas un arc de circonférence, mais un segment rectiligne PQ. Il faut alors considérer l'angle φ égal à 180° et le rayon $P'L'$ comme coïncidant avec la partie négative de l'axe réel (fig. 34). En effet, si z est situé sur le segment PQ, les vecteurs représentant $z - a$ et $z - b$ sont orientés dans des sens directement opposés. Il en découle que le quo-



N. Joukovski

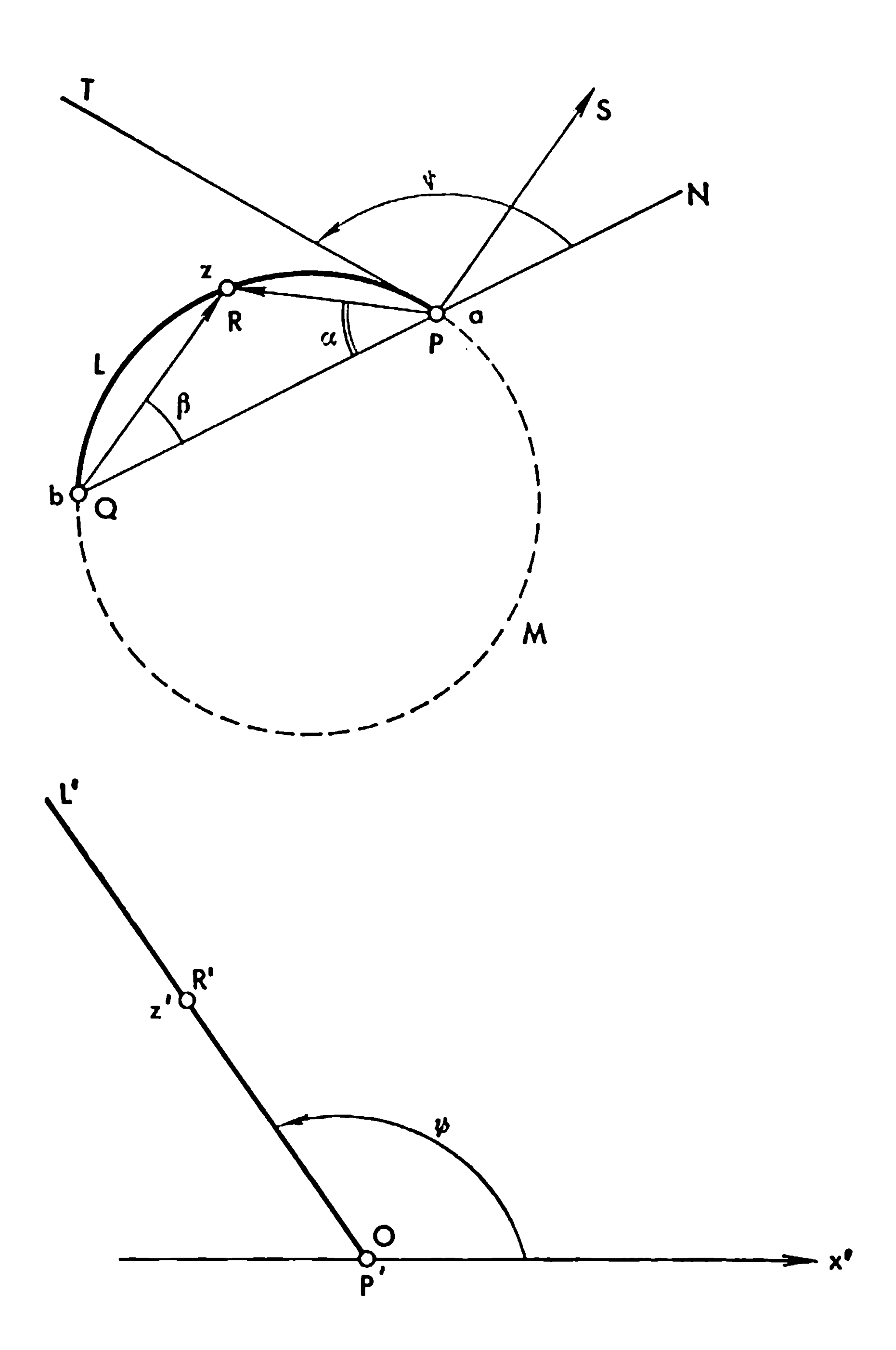


Fig. 33

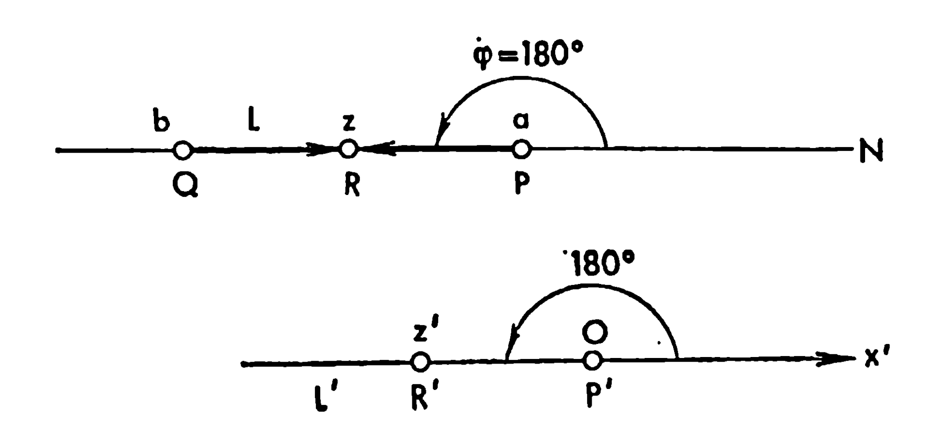


Fig. 34

tient $z' = \frac{z-a}{z-b}$ est un nombre réel négatif, c'est-à-dire que z' est situé sur la partie négative de l'axe réel.

Nous avons démontré que les images des points de l'arc *PLQ* sont situés sur le rayon $P'L'$. Mais remplissent-elles tout le rayon $P'L'$ ou bien reste-t-il, sur ce dernier, des points qui ne sont l'image d'aucun point de l'arc *PLQ* ? Nous allons montrer que les images remplissent le rayon tout entier.

Commençons par le point P' (origine des coordonnées); ce point est l'image du point P, puisque $z' = \frac{z-a}{z-b}$ devient nul pour $z = a$. Prenons un autre point z' quelconque sur le rayon $P'L'$ (fig. 35), distinct de P' (c'est-à-dire $z' \neq 0$). Il est évident que z' ne peut être un nombre réel positif, étant donné que le rayon $P'L'$ ne coïncide pas avec la partie positive de l'axe réel.

Considérant z comme une inconnue, résolvons l'équation $z' = \frac{z-a}{z-b}$ par rapport à z; nous trouvons $zz' - z'b =$ $= z - a$, d'où $z = \frac{z'b-a}{z'-1}$. Donc, pour chaque point z' situé sur $P'L'$ il existe une et une seule valeur de z telle que $z' = \frac{z-a}{z-b}$, c'est-à-dire telle que z' soit l'image de z. Mais où est situé ce point z ? Peut-il se faire qu'il ne se trouve pas

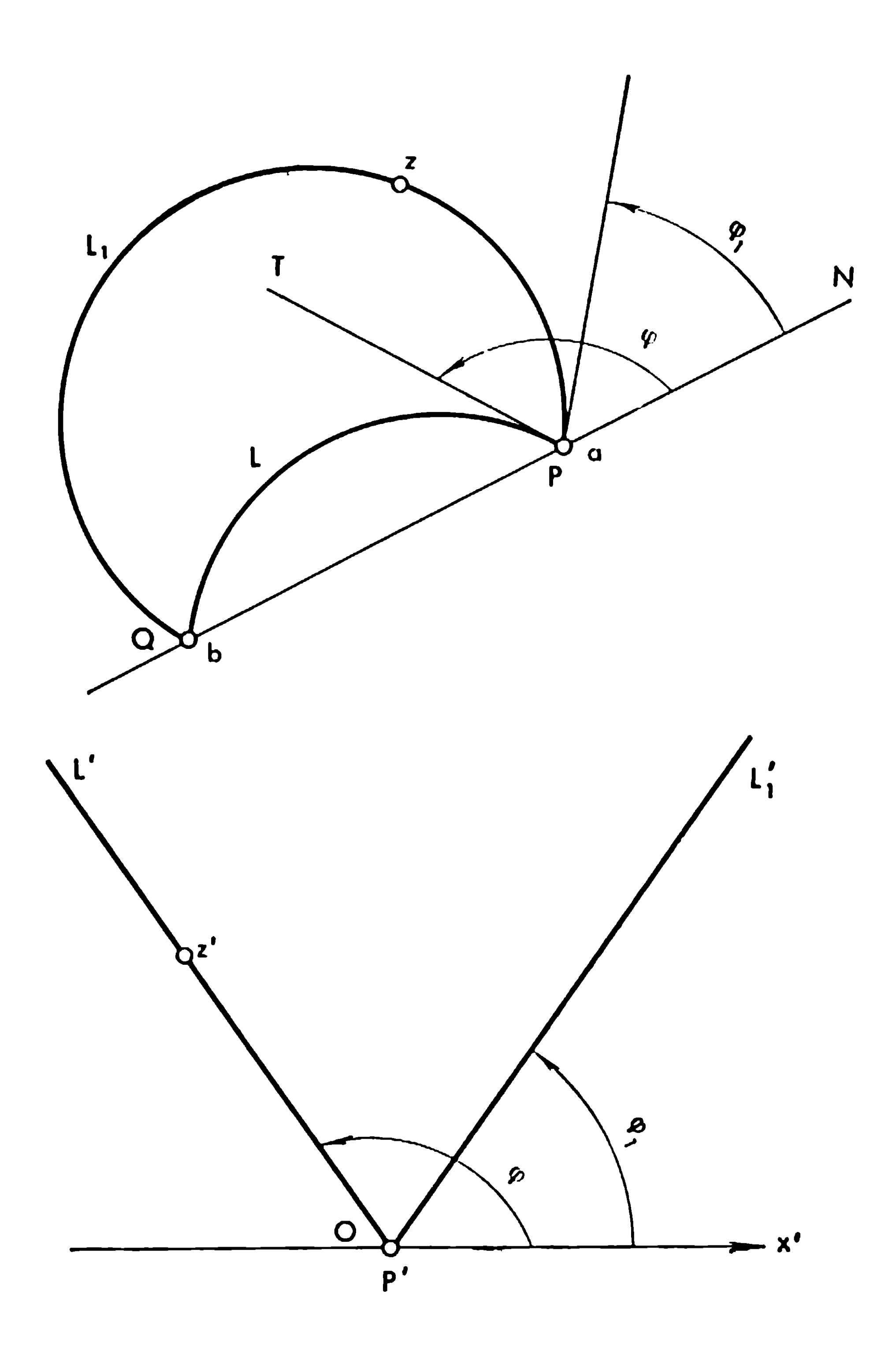


Fig. 35

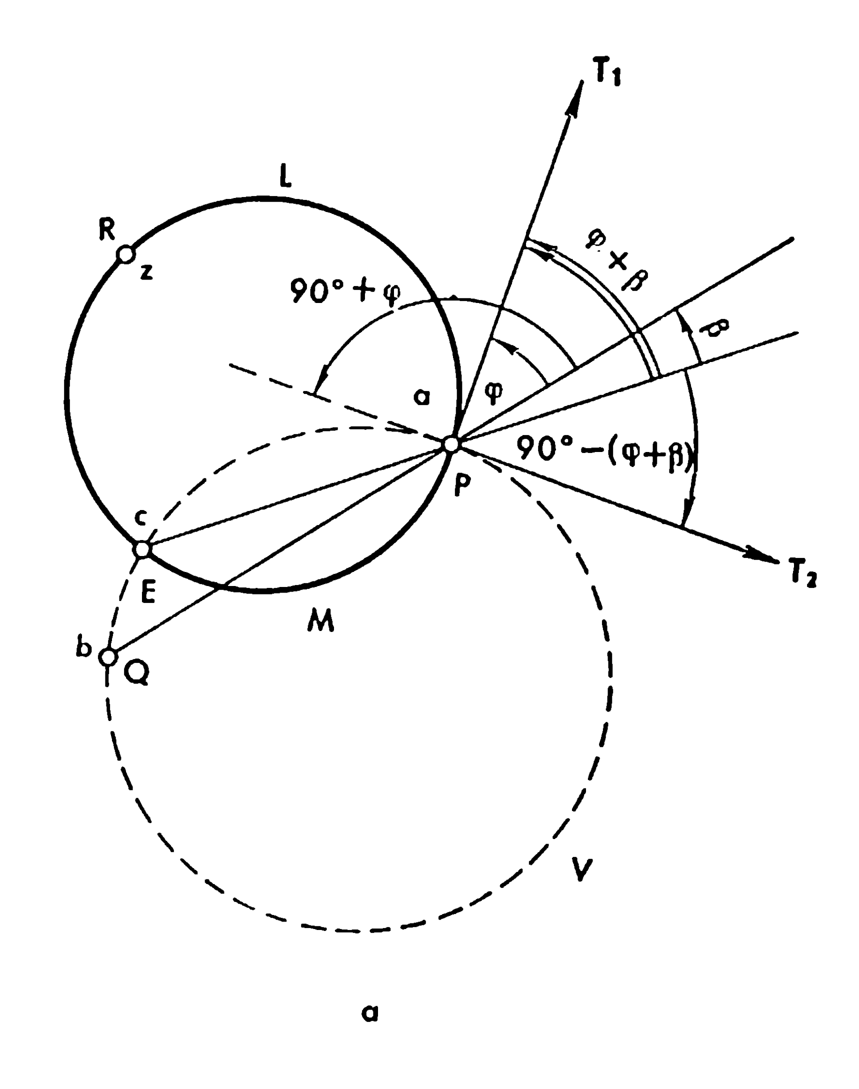
sur PLQ ? Nous allons nous rendre compte que cela est impossible. Tout d'abord, le point z ne peut être situé sur la droite qui est le prolongement du segment PQ (en dehors de ce segment). Dans le cas contraire, $z - a$ et $z - b$ auraient les mêmes arguments et $z' = \frac{z-a}{z-b}$ serait un nombre positif. Mais si z ne se trouve pas sur la droite indiquée en dehors du segment PQ, P et Q peuvent être réunis par un arc de circonférence de façon que cet arc passe par z (si l'on suppose que le point z se trouve sur le segment PQ, au lieu d'arc il faut prendre ce segment même). Désignons cet arc par PL_1Q ; comme il est distinct de PLQ, la tangente à cet arc au point P formera, avec la direction baN un angle φ_1, non égal à φ (fig. 35). C'est pourquoi la valeur de la fonction $z' = \frac{z-a}{z-b}$ en ce point doit être représentée par un point du rayon $P'L'_1$ incliné sur la partie positive de l'axe réel sous un angle φ_1 et, par conséquent, ne coïncidant pas avec $P'L'$. Nous sommes parvenus à une contradiction, étant donné que le point z' distinct du point P' doit se trouver à la fois sur le rayon $P'L'$ et le rayon $P'L'_1$. Donc, nous avons démontré que tout point z' situé sur $P'L'$ est l'image d'un seul point z $\left(z' = \frac{z-a}{z-b}\right)$ et que, de plus, z se trouve sur PLQ. Il en découle que si le point z' parcourt le rayon $P'L'$, le point z qui lui correspond et qui est défini par l'équation $z' = \frac{z-a}{z-b}$ parcourra l'arc PLQ.

Nous allons montrer, enfin, que lorsque z décrit l'arc PLQ en se déplaçant toujours dans le même sens du point P vers le point Q, le point z' décrit le rayon $P'L'$ également toujours dans le même sens en s'éloignant indéfiniment du point P'. Il suffit, pour cela, de démontrer que la distance $P'R' = |z'| = \frac{|z-a|}{|z-b|} = \frac{PR}{QR} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ (voir fig. 33) croît dans ce mouvement du point, en prenant des valeurs indéfiniment grandes. Mais $\varphi + \alpha + \beta = 180°$, d'où $\beta =$

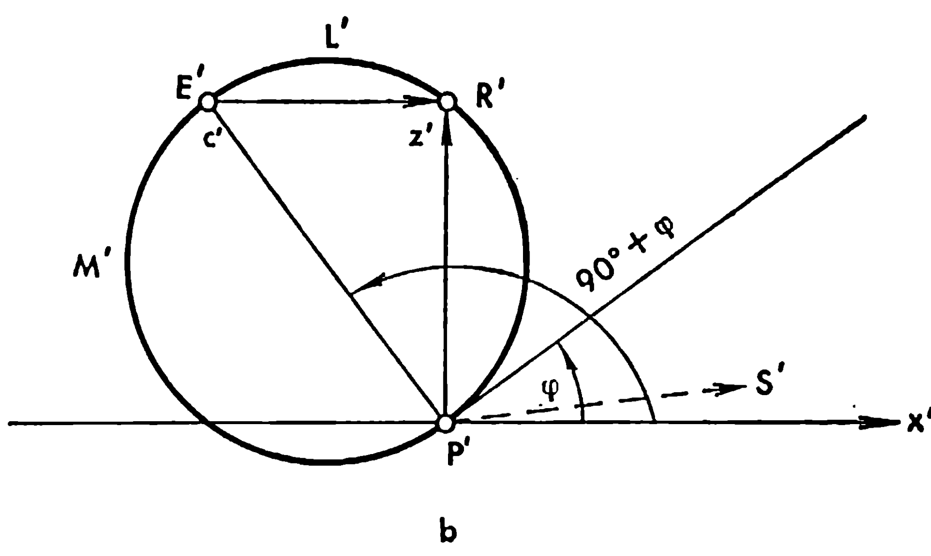
$= 180° - (\alpha + \varphi)$, $\sin \beta = \sin (\alpha + \varphi) = \sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi$ et, par conséquent, $P'R' = |z'| = \frac{\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi}{\sin \alpha} = \cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{ctg} \alpha$. Quand le point z se meut sur PLQ de P vers Q, l'angle α diminue de $180° - \varphi$ à zéro et l'angle φ reste invariable. C'est pourquoi $\operatorname{ctg} \alpha$ croît de la valeur $-\operatorname{ctg} \varphi$ à $+\infty$ et $|z'| = \cos \varphi + \operatorname{ctg} \alpha \sin \varphi$ croît également (en raison de la positivité du nombre $\sin \varphi$) de la valeur $\cos \varphi - \operatorname{ctg} \varphi \sin \varphi = 0$ jusqu'à $+\infty$.

29 Considérons une circonférence PLM quelconque passant par le point a, mais ne passant pas par le point b (fig. 36). Soit φ l'angle entre la tangente au point a et la direction baN. Menons par les points a et b une circonférence auxiliaire pour laquelle la tangente au point a formera, avec la direction baN, un angle $\varphi + 90°$. Cette circonférence aura avec le premier une intersection en un certain point E; désignons par c le nombre complexe représenté par ce point. Nous allons montrer qu'au moyen de la fonction $z' = \frac{z-a}{z-b}$ la circonférence PLM se transforme en circonférence $P'L'M'$ (fig. 36) s'appuyant, comme sur un diamètre, sur le segment $P'E'$ où le point P' représente le nombre 0, et le point E', le nombre $c' = \frac{c-a}{c-b}$. De plus, la tangente à la circonférence $P'L'M'$ au point P' forme avec le sens positif de l'axe réel un angle φ.

Donc, nous nous apprêtons à démontrer que pour tout point z situé sur PLM, le point correspondant $z' = \frac{z-a}{z-b}$, se trouve sur une circonférence $P'L'M'$ pour laquelle le point 0 et le point $c' = \frac{c-a}{c-b}$ sont les extrémités du diamètre. Il est évident qu'il suffit de montrer qu'à partir de tout point $z' = \frac{z-a}{z-b}$ (à condition que z soit situé sur



a



b

Fig. 36

PLM) le segment $P'E'$ est vu sous un angle droit, c'est-à-dire que l'angle $E'R'P'$ est égal à un angle droit [1]). Mais l'angle $E'R'P'$ est formé par les vecteurs $E'R'$ et $P'R'$ représentant les nombres $z' - c'$ et z' ; il est égal à l'angle $S'P'R'$ (le vecteur $P'S'$ a la même longueur et le même sens que le vecteur $E'R'$), mesuré dans le sens de $P'S'$ vers $P'R'$. Ce dernier angle est égal à $\arg \frac{z'}{z'-c'}$, c'est pourquoi l'angle $P'R'E'$ qui nous intéresse coïncide également avec l'argument du nombre $\frac{z'}{z'-c'}$, c'est-à-dire $\widehat{P'R'E'} = \arg \frac{z'}{z'-c'}$.
Transformons l'expression $\frac{z'}{z'-c'}$ en substituant $\frac{z-a}{z-b}$ à z' et $\frac{c-a}{c-b}$ à c'. Nous obtenons:

$$\frac{z'}{z'-c'} = \frac{z-a}{z-b} : \left(\frac{z-a}{z-b} - \frac{c-a}{c-b}\right) = \frac{z-a}{z-b} : \frac{(z-c)(a-b)}{(z-b)(c-b)} =$$
$$= \frac{z-a}{z-c} : \frac{b-a}{b-c} = \frac{z''}{b''}.$$

Nous avons posé ici $\frac{z-a}{z-b} = z''$ et $\frac{b-a}{b-c} = b''$. Il est évident que z'' est également une fonction homographique de z. Cette fonction $z'' = \frac{z-a}{z-b}$ se distingue de notre fonction initiale $z' = \frac{z-a}{z-b}$ seulement par la substitution du point c au point b. Ce que nous avons dit au § 28 peut être appliqué à la nouvelle fonction. Si un point z se trouve sur l'arc de circonférence réunissant a et c, le point z'' doit se trouver sur un certain rayon rectiligne issu de l'origine des coordonnées. De plus, si la tangente à l'arc de circonférence au point a forme avec la direction caU un certain angle α, le rayon rectiligne correspondant forme également avec la

---

[1])Parce que les points du plan à partir desquels le segment donné est vu sous un angle droit sont situés sur une circonférence construite sur ce segment pris comme diamètre.

direction positive de l'axe réel un angle α; en d'autres termes, l'argument z'' est égal à α. Etant donné que le point z se trouve sur un arc de la circonférence PLE passant par les points a et c et que l'angle entre la tangente PT_1 à cette circonférence et la direction caU est égal à $\beta + \varphi$ (fig. 36, a), l'argument du nombre $z'' = \frac{z-a}{z-c}$ doit être aussi égal à $\beta + \varphi$ pour toutes les positions de z sur l'arc PLE. D'autre part, le point b est situé sur l'arc PVE de la circonférence réunissant les points a et c. La tangente PT_2 au point a de cet arc forme un angle $(\beta + \varphi) - 90°$ avec la direction caU (en valeur absolue, cet angle est égal à $90° - (\beta + \varphi)$, mais on voit sur la figure 36,a que, dans notre cas, il est mesuré dans le sens négatif et, par conséquent, on doit le prendre avec le signe —). C'est pourquoi la valeur de la fonction homographique $\frac{z-a}{z-c}$ correspondant à $z = b$, c'est-à-dire le nombre $b'' = \frac{b-a}{b-c}$ doit être représenté par un point du rayon issu de l'origine des coordonnées sous un angle $(\beta + \varphi) - 90°$ par rapport au sens positif de l'axe réel, c'est-à-dire $\arg b'' = (\beta + \varphi) - 90°$.

Rappelons que nous voulions définir l'angle

$$\widehat{P'R'E'} = \arg \frac{z'}{z'-c'}.$$

Nous avons trouvé que $\frac{z'}{z'-c'} = \frac{z''}{b''}$ et, de plus, que

$$\arg z'' = \beta + \varphi, \quad \arg b'' = (\beta + \varphi) - 90°;$$

il en découle que $\arg \frac{z''}{b''} = 90°$ (fig. 37) et

$$\widehat{P'R'E'} = \arg \frac{z'}{z'-c'} = \arg \frac{z''}{b''} = 90°.$$

Donc, de chaque point $z' = \frac{z-a}{z-b}$ le segment $P'E'$ est vu sous un angle droit. Ceci signifie que le point z' est situé

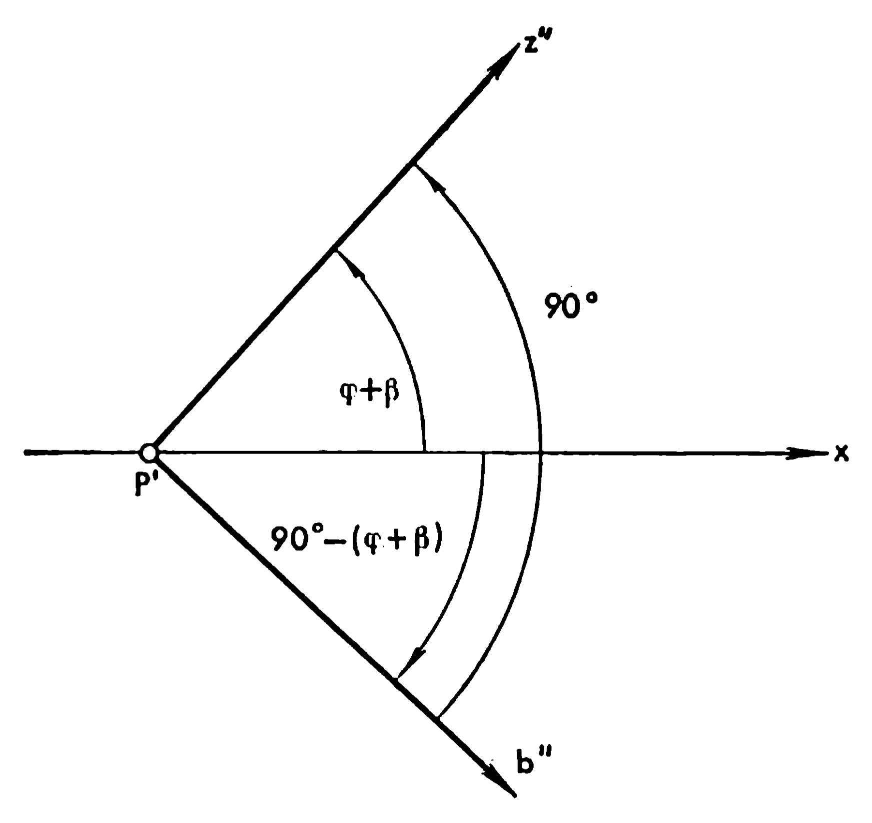


Fig. 37

sur le cercle $P'L'M'$ dont le segment $P'E'$ est le diamètre [1]).

Il faut encore démontrer que la tangente à cette circonférence au point P' forme, avec le sens positif de l'axe réel, un angle φ. Pour cela, il suffit de montrer que l'angle entre le diamètre $P'E'$ et cette direction de l'axe est égal à $\varphi + 90°$. Ce dernier angle coïncide avec $\arg c' = \arg \frac{c-a}{c-b}$. Mais le point c se trouve sur l'arc PEQ de la circonférence

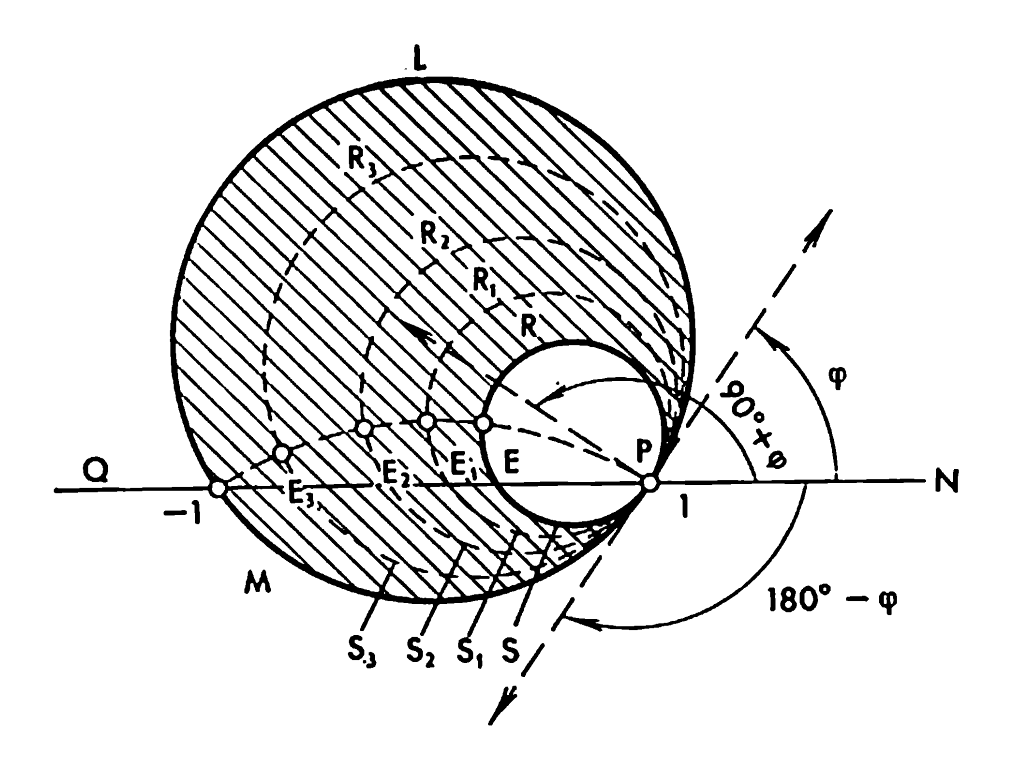
---

[1]) Dans la démonstration, nous avons pris un point z sur l'arc PLE ; le point z' correspondant tombe alors sur la demi-circonférence $P'L'E'$. Si l'on prend le point z sur l'arc EMP, la démonstration ne change en rien ; il faudra seulement remarquer que la direction de la tangente à cet arc au point a est directement opposée à PT_1. Ceci signifie que $\arg z''$ sera égal non pas à $\beta + \varphi$, mais à $\beta + \varphi - 180°$. C'est pourquoi, pour l'angle $P'R'E' = \arg \frac{z'}{z'-c'}$ nous obtenons la valeur $(\beta + \varphi - 180°) - (\beta + \varphi - 90°) = -90°$. Ceci correspond à la position du point z' sur la demi-circonférence $E'M'P'$.

réunissant les points a et b. Etant donné que la tangente à cet arc au point a forme avec la direction baN un angle $90° + \varphi$, le point $c' = \frac{c-a}{c-b}$ doit se trouver sur le rayon formant également avec la direction positive de l'axe réel un angle $90° + \varphi$, c'est-à-dire $\arg c' = 90° + \varphi$, ce qu'il fallait démontrer.

30 Elucidons, par un exemple, en quoi se transforme la figure hachurée sur la fig. 38, à gauche, dans une reproduction au moyen de la fonction $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Cette fonction est de la forme $\frac{z-a}{z-b}$ où $a = 1$ et $b = -1$. Etant donné que l'arc PLQ passe par les points 1 et -1 et forme au point $a = 1$ un angle φ avec la direction QPN, d'après le § 28, il se transforme en rayon $P'L'$ issu de l'origine des coordonnées et formant également un angle φ avec le sens positif de l'axe réel. L'arc PMQ réunit les mêmes points 1 et -1, mais il forme au point $a = 1$ un angle $\varphi - 180°$ avec la direction QPN (en valeur absolue, cet angle est égal à $180° - \varphi$; nous avons tenu compte, toutefois, qu'il est mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre, donc, dans le sens négatif). C'est pourquoi la fonction $z' = \frac{z-1}{z+1}$ transforme l'arc PMQ en rayon $P'M'$ issu de l'origine des coordonnées et formant un angle $\varphi - 180°$ avec le sens positif de l'axe réel. Il est évident que les rayons $P'L'$ et $P'M'$ constituent ensemble une droite; par conséquent, la fonction $z' = \frac{z-1}{z+1}$ transforme la circonférence $PLQM$ tout entière (composée des arcs PLQ et PMQ) en toute la droite $M'P'L'$.

Menons par les points P et Q l'arc d'une circonférence auxiliaire pour laquelle la tangente au point P forme avec QPN un angle $\varphi + 90°$. Cet arc a, avec la circonférence PRS, une intersection au point E. D'après le § 28, l'arc PEQ est transformé par la fonction $z' = \frac{z-1}{z+1}$ en rayon issu du


L
R3
R2
R1
R
φ
90°+φ
Q
E
E1
E2
E3
P
N
-1
1
M
180° - φ
S3
S2
S1
S

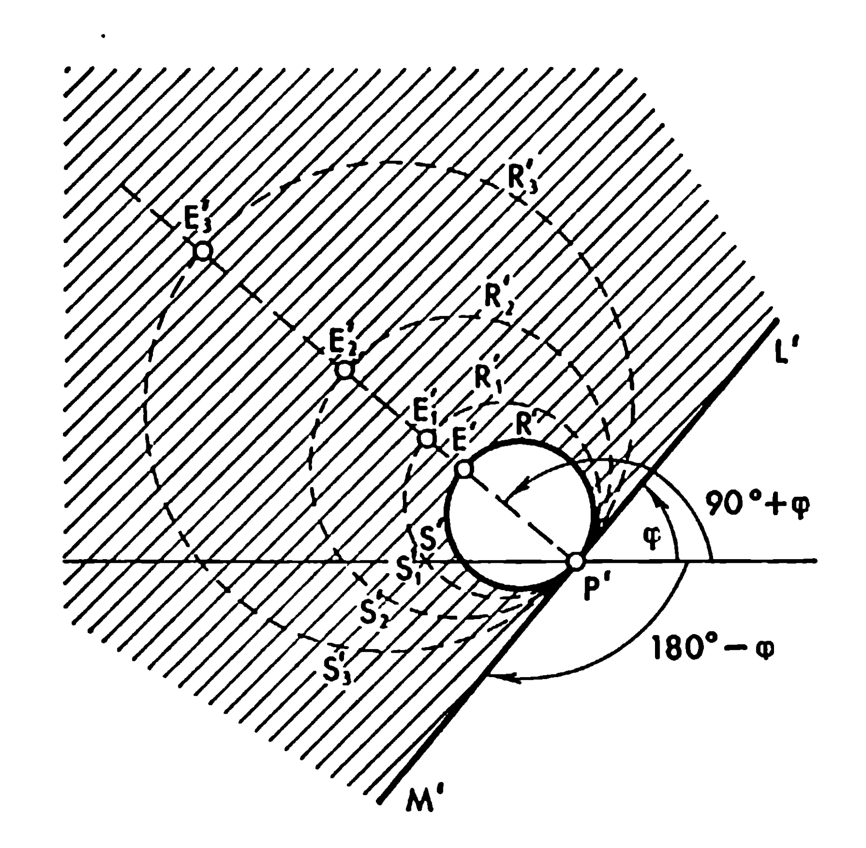

R'3
E'3
R'2
E'2
L'
R'1
E'1
E'
R'
90°+φ
S'
φ
S'1
P'
S'2
180°-φ
S'3
M'

Fig. 38

point P' et incliné sur le sens positif de l'axe réel sous un angle de $\varphi + 90°$. De plus, le point E se transforme en un certain point E' de ce rayon. D'après le § 29, la circonférence $PRES$ est transformée par la fonction $z' = \frac{z-1}{z+1}$ en une circonférence $P'R'E'S'$ construite sur le segment $P'E'$ comme diamètre. Donc, par transformation, la circonférence $PLQM$ devient une droite $M'P'L'$ et la circonférence $PRES$, tangente à la première intérieurement, devient la circonférence $P'R'E'S'$, tangente à la droite $M'P'L'$ au point P'. Peut-on admettre que nous ayons déjà résolu le problème de la transformation de la figure hachurée au moyen de la fonction $z' = \frac{z-1}{z+1}$? Non, le problème n'est pas encore entièrement résolu : en effet, nous avons seulement trouvé ce que devient le contour de cette figure, mais il faut suivre encore la transformation des points de la figure inclus entre les circonférences $PRES$ et $PLQM$.

Pour élucider ce côté de la question, remarquons que toute la figure hachurée pourrait être remplie de circonférences tangentes à $PLQM$ au point P et comprises entre $PRES$ et $PLQM$. Elles couperont l'arc PEQ en des points situés entre E et Q. La figure 38 représente en pointillé trois parmi l'infinité de telles circonférences, coupant l'arc PEQ en des points E_1, E_2 et E_3. Si nous suivons en quelles lignes se transforment ces circonférences au moyen de la fonction $z' = \frac{z-1}{z+1}$ nous pourrons nous faire également une idée de la forme de la figure remplie par toutes ces lignes. Ce sera la figure transformée.

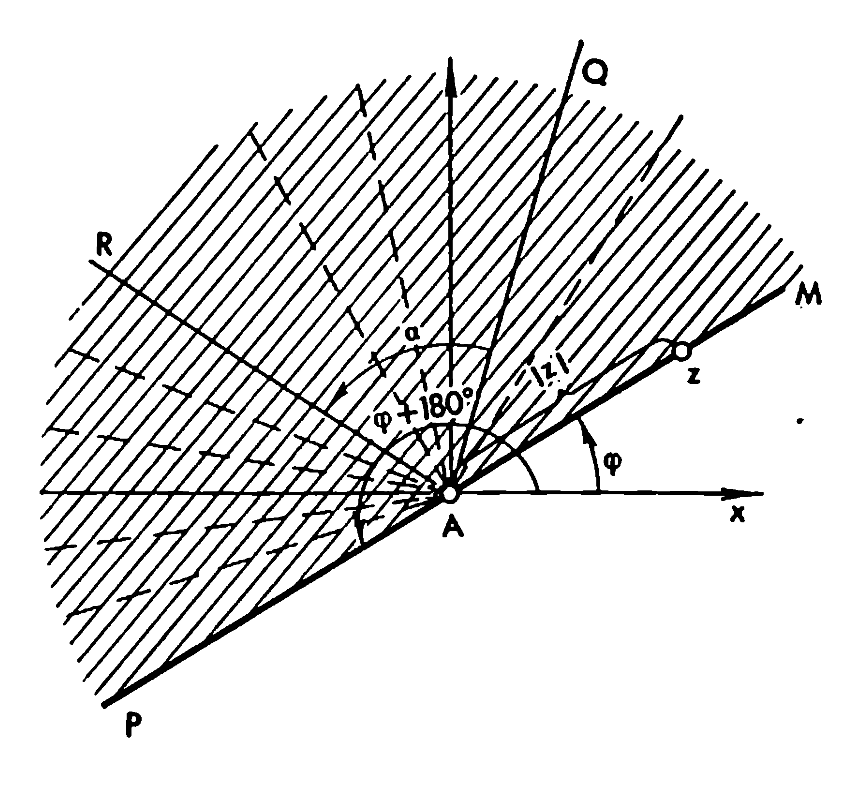
Mais en appliquant les déductions du § 29, nous concluons que la circonférence $PR_1E_1S_1$ se transforme en circonférence $P'R_1'E_1'S_1'$, la circonférence $PR_2E_2S_2$ en $P'R_2'E_2'S_2'$ et ainsi de suite.

A la fin du § 28, nous avons montré qu'à mesure que le point z se déplace le long de l'arc PQ, en se rapprochant

de Q, le point z' qui lui correspond se déplace sur un rayon en s'éloignant de plus en plus du point initial P'. Il en découle que si le point E_2 est plus rapproché de Q que le point E_1, le point E'_2, image du point E_2, se trouve sur le rayon plus loin de P' que le point E'_1, image du point E_1. C'est pourquoi le diamètre $P'E'_2$ de la circonférence $P'R'_2E'_2S'_2$, image de la circonférence $PR_2E_2S_2$, doit être plus grand que le diamètre $P'E'_1$ de la circonférence $P'R'_1E'_1S'_1$, image de la circonférence $PR_1E_1S_1$, comme le montre notre figure. Si l'on prend une circonférence $PR_3E_3S_3$ coupant PEQ suffisamment près de Q on peut arriver à ce que son image $P'R'_3E'_3S'_3$ ait un diamètre aussi grand que l'on veut. Il est clair que toutes les images des circonférences telles que $PR_1E_1S_1$, $PR_2E_2S_2$, $PR_3E_3S_3$, etc., remplissant la figure hachurée sur la fig. 38, à gauche, rempliront à leur tour la figure hachurée sur le même dessin à droite. Elle est l'image de la figure initiale transformée par la fonction $z' = \frac{z-1}{z+1}$. Donc, la fonction $z = \frac{z-1}{z+1}$ transforme la figure limitée par deux circonférences (fig. 38, à gauche) en une figure limitée par une droite et une circonférence (fig. 38, à droite).

31 Occupons-nous maintenant de la transformation par la fonction $z' = z^2$. Dans le renvoi de la p. 202, nous avons prévenu le lecteur qu'une exception était possible à la règle générale de la conservation des angles dans les transformations par des fonctions rationnelles. Précisément, les angles ayant leur sommet en certains points particuliers peuvent varier de plusieurs fois. Dans le cas donné, un tel point particulier existe, c'est l'origine A des coordonnées. Nous allons montrer que tous les angles ayant leur sommet en A sont doublés par la transformation $z' = z^2$.

Prenons un rayon AM issu du point A et formant un angle φ avec la partie positive de l'axe réel (fig. 39). Pour chaque point z se trouvant sur ce rayon, $\arg z = \varphi$. Etant



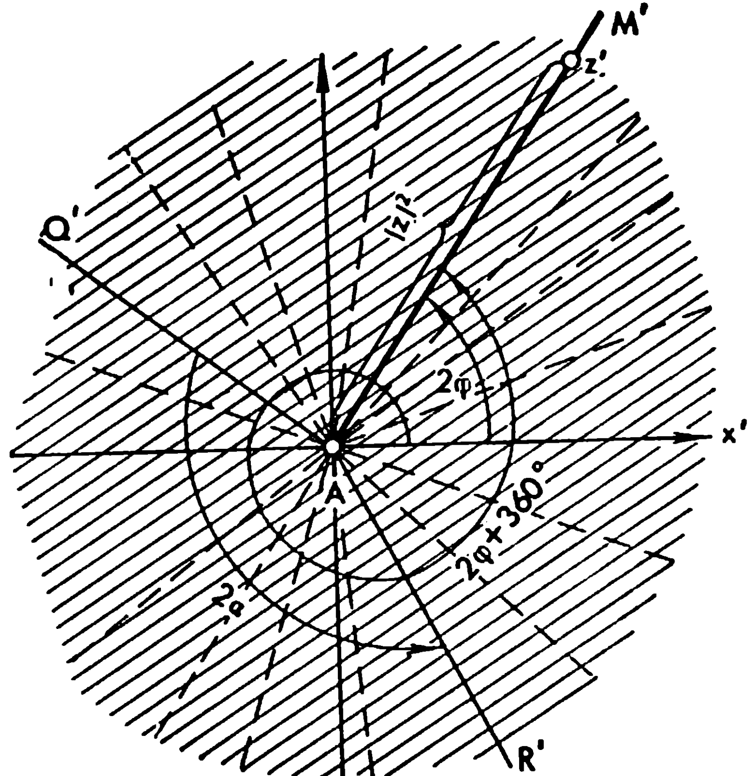


Fig. 39

donné que le vecteur $z' = z^2 = z \cdot z$ est obtenu à partir du vecteur z par dilatation de $|z|$ fois et rotation d'un angle $\arg z = \varphi$, il s'ensuit que $|z'| = |z| \cdot |z| = |z|^2$ et $\arg z' = \arg z + \arg z = 2\varphi$. C'est pourquoi le point z' doit se trouver sur le rayon $A'M'$ issu du point A' et formant avec la partie positive de l'axe réel un angle 2φ. Si le point z se déplace le long de AM à partir de A et au-delà en s'en éloignant indéfiniment, le point z' correspondant se déplacera le long de $A'M'$ à partir du point A' et au-delà, en s'en éloignant indéfiniment, la distance de z' à A' restant toujours égale au carré de la distance de z à A ($|z'| = |z|^2$).

Il en découle que la fonction $z' = z^2$ transforme le rayon AM en rayon $A'M'$ incliné sur l'axe $A'x'$ d'un angle deux fois plus grand par rapport à l'angle d'inclinaison initial.

On comprend aisément que le rayon AP formant avec Ax un angle $\varphi + 180°$ (AM et AP sont sur la même droite) est transformé par la fonction $z' = z^2$ en ce même rayon $A'M'$. En effet, si on double l'angle $\varphi + 180°$, on obtient $2\varphi + 360°$; le rayon incliné de cet angle sur $A'x'$ coïncide avec $A'M'$.

Regardons en quoi est transformée par la fonction $z' = z^2$ la figure hachurée sur la fig. 39, à gauche; on l'appelle un demi-plan. On peut considérer le demi-plan comme rempli d'une infinité de rayons issus de A et inclinés sur Ax sous des angles plus grands que φ, mais moins grands que $\varphi + 180°$. Les rayons AM et AP constituent la frontière du demi-plan, (une droite) ; nous ne considérerons pas ces rayons comme faisant partie du demi-plan lui-même. La fonction $z' = z^2$ transforme les rayons appartenant au demi-plan en tous les rayons possibles issus de A' et inclinés sur $A'x'$ sous des angles plus grands que 2φ, mais moins grands que $2\varphi + 360°$.

Il en découle que le demi-plan limité par les rayons AM et AP se transforme en une figure limitée par un seul rayon $A'M'$ (fig. 39, à droite). Cette dernière figure peut être considérée comme un plan ayant rejeté (ou exclu) le rayon

$A'M'$. En parlant ainsi, nous voulons souligner que cette figure est formée par tous les points du plan, excepté les points se trouvant sur $A'M'$. Si on prend, sur le demi-plan, deux rayons AQ et AR quelconques inclinés sur Ax sous des angles φ_1 et φ_2 $(\varphi_2 > \varphi_1)$, ils forment entre eux un angle $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$. Par la transformation $z' = z^2$ ces rayons deviennent $A'Q'$ et $A'R'$, inclinés sur $A'x'$ sous des angles $2\varphi_1$ et $2\varphi_2$. On voit aussitôt que l'angle $Q'A'R'$ est égal à $2\varphi_2 - 2\varphi_1 = 2(\varphi_2 - \varphi_1) = 2\alpha$.

Donc, les angles ayant leur sommet en A doublent par la transformation $z' = z^2$, en d'autres termes, au point A la transformation n'est pas conforme.

32 Nous allons montrer que les angles ayant leur sommet en n'importe quel point $z_0 \neq 0$ ne changent pas au cours d'une transformation $z' = z^2$. Il en découlera que l'origine des coordonnées est le seul point auquel cette transformation cesse d'être conforme.

Soit L une courbe quelconque issue du point z_0. Si sur L on prend un point z_1 distinct de z_0, la direction de la sécante réunissant z_0 et z_1 coïncidera avec la direction du vecteur Q_0Q_1 représentant la différence $z_1 - z_0$ (fig. 40, à gauche). Au moyen de la fonction $z' = z^2$, la courbe L se transforme en une certaine courbe L', et les points z_0 et z_1, en de nouveaux points $z'_0 = z_0^2$ et $z'_1 = z_1^2$ situés sur la courbe L'. Il est évident que la direction de la sécante réunissant z'_0 et z'_1 coïncide avec la direction du vecteur $Q'_0Q'_1$ représentant la différence $z'_1 - z'_0$ (fig. 40, à droite). Nous comparerons entre elles les directions des deux sécantes; il suffit pour cela de comparer entre elles les directions des vecteurs $z'_1 - z'_0$ et $z_1 - z_0$. Comme l'angle qu'ils forment, mesuré à partir du vecteur $z_1 - z_0$ vers le vecteur $z'_1 - z'_0$, coïncide avec l'argument du quotient $\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$, toute la comparaison revient à calculer $\arg \frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$. Le quotient $\frac{z'_1 - z'_0}{z_1 - z_0}$ peut être

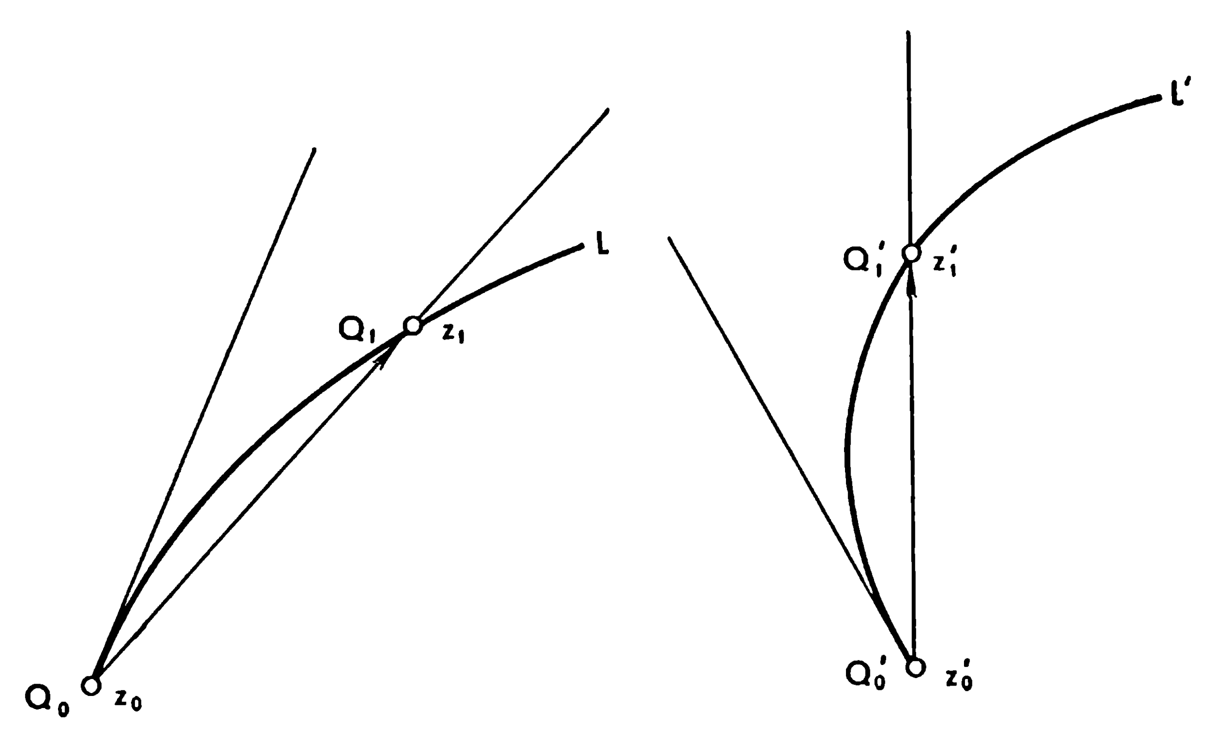


Fig. 40

modifié en substituant à z_1' et z_0' leurs expressions: $z_1' = z_1^2$ et $z_0' = z_0^2$. Nous obtenons:

$$\frac{z_1'-z_0'}{z_1-z_0}=\frac{z_1^2-z_0^2}{z_1-z_0}=z_1+z_0 \text{ et } \arg\frac{z_1'-z_0'}{z_1-z_0}=\arg(z_1+z_0).$$

Par conséquent, l'angle entre les directions des sécantes des courbes L' et L menées par des couples de points correspondants z_0 et z_1 (sur L) et $z_0' = z_0^2$ et $z_1' = z_1^2$ (sur L') est égal à $\arg(z_1 + z_0)$. En passant des sécantes aux tangentes, le point z_1 sur la courbe L se rapprochera indéfiniment du point z_0.

Le point $z_1' = z_1^2$ se rapprochera alors aussi indéfiniment du point $z_0' = z_0^2$ sur la courbe L'. C'est pourquoi nos sécantes se rapprocheront aussi indéfiniment des tangentes menées en z_0 et z_0', et l'angle entre les sécantes, de l'angle entre les tangentes. Mais l'angle entre les sécantes est égal à $\arg(z_0 + z_1)$ et, si z_1 tend vers z_0, il tend vers $\arg(2z_0)$;

ce dernier coïncide avec $\arg z_0$. Donc, l'angle entre les tangentes aux courbes L' et L menées aux points correspondants $z'_0 = z_0^2$ et z_0 est égal à $\arg z_0$. Si, par exemple, $z_0 = 2$, $\arg z_0 = 0$. D'où il découle que la direction de la tangente au point $z_0 = 2$ à toute courbe L menée par ce point coïncidera avec la direction de la tangente au point $z'_0 = z_0^2 = 4$ de la courbe L' en laquelle la fonction $z' = z^2$ transforme L. Si $z_0 = i$, $\arg z_0 = 90°$; par conséquent la tangente au point $z_0 = i$ à toute courbe L menée par ce point et la tangente au point $z_0^2 = i^2 = -1$ à l'image de la courbe L' sont réciproquement perpendiculaires.

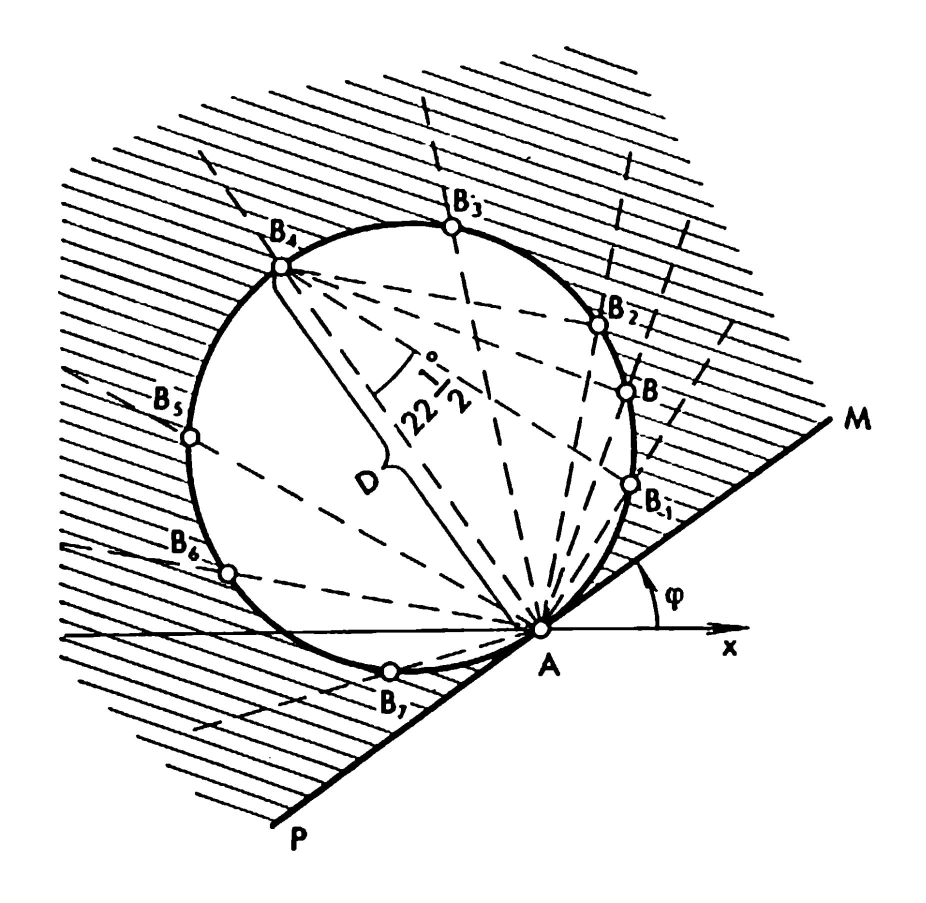
Pour revenir au cas général, on peut dire que les tangentes font une rotation d'un angle égal à $\arg z_0$ quand les courbes passant par le point z_0 sont transformées par la fonction $z' = z^2$.

Dès lors, on comprend facilement pourquoi les angles ayant leur sommet en z_0 ($z_0 \neq 0$) restent invariables dans cette transformation. Si deux courbes L_1 et L_2 passent par le point z_0 en formant un angle α en ce point, ceci signifie que les tangentes aux courbes en ce point forment entre elles un angle α. Après transformation, le point z_0 passe au point $z'_0 = z_0^2$ et les courbes L_1 et L_2 deviennent les courbes L'_1 et L'_2. Les directions des tangentes au point z'_0 à ces nouvelles courbes sont obtenues à partir des directions précédentes des tangentes par rotation d'un même angle égal à $\arg z_0$. Il est évident que l'angle entre les nouvelles tangentes conserve sa valeur précédente α. Or, ceci signifie que l'angle entre les courbes ayant son sommet en un point $z_0 \neq 0$ quelconque ne change pas dans la transformation $z' = z^2$.

Remarquons que le procédé par lequel nous avons démontré la conformité de la représentation $z' = z^2$ est également applicable à d'autres fonctions, par exemple, la fonction homographique $z' = \frac{z-a}{z-b}$ ou la fonction de Joukovski $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$. Seulement, on obtient ici d'autres ex-

pressions pour l'angle de rotation de la tangente. Ainsi, avec la fonction homographique, les tangentes aux courbes passant par le point z_0 tournent d'un angle égal à arg $\frac{a-b}{(z_0-b)^2}$, et dans le cas de la fonction de Joukovski, d'un angle égal à arg $\left(1-\frac{1}{z_0^2}\right)$. Dans le premier cas, il faut supposer de plus que $z_0 \neq b$ (en ce point l'expression $\frac{z-a}{z-b}$ est privée de sens); dans le second cas, il faut supposer que $z_0 \neq 0$ (pour une raison analogue) et, en outre, que $z_0 \neq \pm 1$ (en ces points $1-\frac{1}{z_0^2}$ devient nul et, par conséquent, arg $\left(1-\frac{1}{z_0^2}\right)$ perd son sens). On pourrait vérifier que, dans le cas de la fonction de Joukovski, la transformation cesse d'être conforme aux points -1 et $+1$; les angles ayant leur sommet en ces points doublent en se transformant.

33 Examinons ce que devient, par la fonction $z' = z^2$, une circonférence passant par le point A. Supposons que la tangente à la circonférence en ce point forme avec Ax un angle φ (fig. 41). Il est évident que la circonférence se trouve dans le demi-plan limité par cette tangente. La fonction $z' = z^2$ transforme le demi-plan en un plan dont le rayon $A'M'$ est rejeté. Pour trouver l'image de la circonférence, menons à partir de A sur le demi-plan tous les rayons possibles et marquons sur chacun d'eux le point d'intersection avec la circonférence. Pour fixer les idées, sur notre figure, nous avons mené 7 rayons; tous les angles MAB_1, B_1AB_2, B_2AB_3, . . ., B_7AP sont pris égaux entre eux $\left(22\frac{1^\circ}{2}\right)$. La fonction $z' = z^2$ les transforme en rayons formant entre eux des angles deux fois plus grands; chacun de ces angles $M'A'B'_1$, $B'_1A'B'_2$, $B'_2A'B'_3$, . . ., $B'_7A'P'$ est égal à 45°.



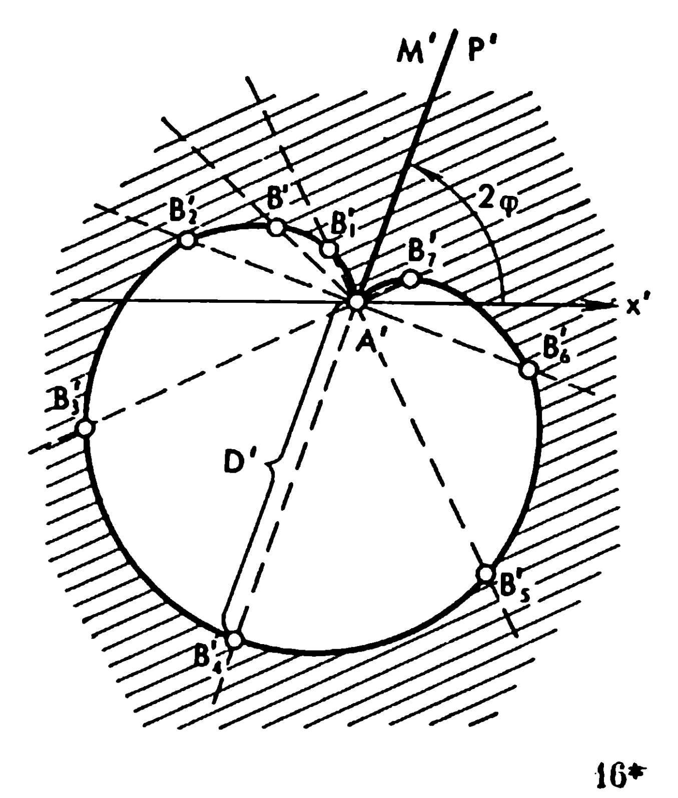


Fig. 41

Calculons où passent les points B_1, B_2, B_3, . . ., B_7. Les distances de leurs images B'_1, B'_2, B'_3, . . ., B'_7 au point A' seront égales aux carrés des distances AB_1, AB_2, AB_3, . . ., AB_7. Mais on voit sur la figure 41 que $AB_7 = AB_1 = AB_4 \sin 22\frac{1^\circ}{2} = D \sin 22\frac{1^\circ}{2}$ (D, diamètre de la circonférence) ; ensuite, $AB_6 = AB_2 = D \sin 45^\circ$, $AB_5 = AB_3 = D \sin 67\frac{1^\circ}{2}$, $AB_4 = D$. Il reste à remarquer que $\sin^2 22\frac{1^\circ}{2} = \frac{1-\cos 45^\circ}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4} = \frac{2-1{,}4142}{4} = 0{,}1464\ldots$, $\sin^2 45^\circ = 0{,}5000\ldots$, $\sin^2 67\frac{1^\circ}{2} = \cos^2 22\frac{1^\circ}{2} = 1 - \sin^2 22\frac{1^\circ}{2} = 0{,}8535\ldots$ Par conséquent, $A'B'_7 = A'B'_1 = 1464D^2$, $A'B'_6 = A'B'_2 = 0{,}5000D^2$; $A'B'_5 = A'B'_3 = 0{,}8535D^2$; $A'B'_4 = D^2$. Par les points A', B'_1, B'_2, B'_3, . . ., B'_7 passe une courbe qui est l'image de la circonférence obtenue par la transformation $z' = z^2$. Pour en avoir une idée plus précise, on pourrait prendre un plus grand nombre de rayons. Cette courbe est appelée *cardioïde* (en forme de cœur). On comprend aisément que la figure hachurée sur la fig. 41, à gauche (elle est obtenue à partir d'un demi-plan dont on a rejeté une circonférence) se transforme par la fonction $z' = z^2$ en la figure hachurée sur le même dessin, à droite. Cette dernière est limitée par la cardioïde et le rayon $A'M'$ formant un angle 2φ avec la direction positive de l'axe réel. On peut montrer que le rayon $A'M'$ est dirigé selon la tangente à chacun des deux arcs de la cardioïde, issus du point A. En effet, menons sur la fig. 41, à gauche, un rayon AB quelconque et soit B le point de son intersection avec la circonférence; si l'angle $MAB = \alpha$, $AB = D \sin \alpha$. Au moyen de la fonction $z' = z^2$, ce rayon se transforme en rayon $A'B'$ (fig. 41, à droite) de sorte que le point B', image du point B tombe sur la cardioïde. En vertu des propriétés connues de la transforma-

tion $z' = z^2$ nous avons: $\widehat{M'A'B'} = 2\alpha$ et $A'B' = AB^2 = D^2 \sin^2 \alpha$. Nous considérerons l'angle α comme variable et nous l'obligerons à se rapprocher indéfiniment de zéro. L'angle 2α entre $A'B'$ et $A'M'$ se rapprochera alors aussi indéfiniment de zéro et le rayon $A'B'$ même, sécante de la cardioïde, tournera autour du point A', en se rapprochant indéfiniment de la position limite $A'M'$. Ce faisant, le point B', point d'intersection de la sécante avec la courbe le plus proche de A', se rapprochera indéfiniment de A', étant donné que la distance $A'B' = D^2 \sin^2 \alpha$ tend vers zéro quand α tend vers zéro. D'où il découle que $A'M'$, position limite de la sécante, est la tangente à la courbe $A'B'_1B'_2 \ldots$ au point A'. On peut de même se rendre compte que $A'M'$ est aussi la tangente à l'arc $A'B'_7B'_6 \ldots$ au même point A'.

34 Voyons maintenant la fonction de Joukovski $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ et appliquons-la à la transformation d'une figure limitée par deux circonférences: l'une passant par les points -1 et $+1$ et l'autre, tangente au premier intérieurement au point 1; cette figure est hachurée sur la fig. 42.

Pour commencer, nous allons nous rendre compte que la transformation $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ peut être ramenée à quelques transformations successives plus simples d'un genre que nous connaissons déjà. A cette fin, considérons le rapport $\frac{z'-1}{z'+1}$. Substituons-y l'expression $\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ à z'; nous trouvons:

$$\frac{z'-1}{z'+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1} = \frac{z^2+1-2z}{z^2+1+2z} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

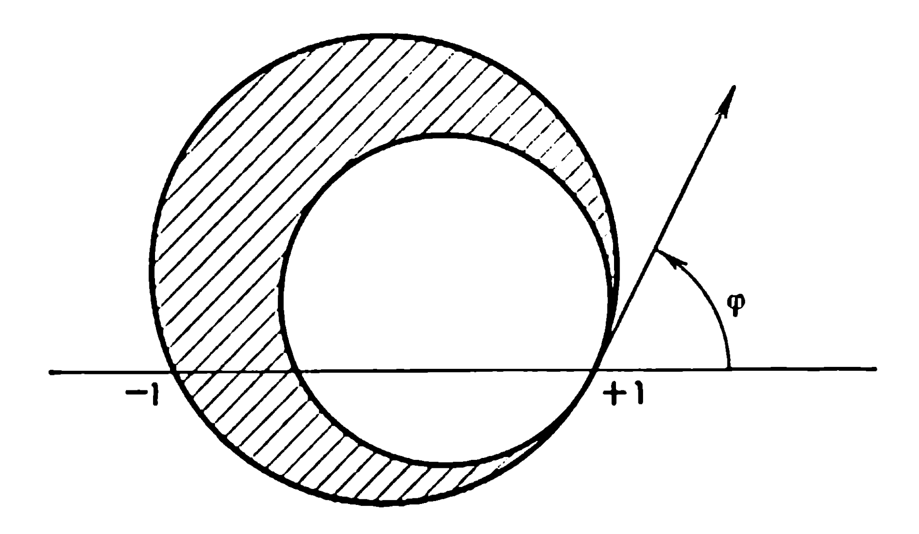


Fig. 42

Donc, de la relation $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ il découle que $\frac{z'-1}{z'+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. La réciproque est également vraie. En effet, de la deuxième, nous tirons:

$$z' - 1 = z'\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

d'où

$$z'\left[1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right] = 1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

et ensuite,

$$z' = \frac{1 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2}{1 - \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2} = \frac{(z+1)^2 + (z-1)^2}{(z+1)^2 - (z-1)^2} = \frac{2z^2+2}{4z} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Donc, les relations $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ et $\frac{z'-1}{z'+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ sont équivalentes (elles découlent l'une de l'autre).

C'est pourquoi la transformation de Joukovski $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ peut être représentée sous la forme $\frac{z'-1}{z'+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$. On doit obtenir le même résultat. Mais on voit maintenant que le passage de z à z' peut se réaliser en trois étapes. On commence par passer de z à la variable auxiliaire z_1 d'après la formule:

$$z_1 = \frac{z-1}{z+1}, \tag{1}$$

puis de z_1, on passe à z_2 par la formule:

$$z_2 = z_1^2, \tag{2}$$

enfin de z_2 on passe à z' par la formule:

$$\frac{z'-1}{z'+1} = z_2. \tag{3}$$

Le lecteur se rendra compte aisément que si l'on porte en (2) l'expression z_1 donnée par la formule (1) et qu'on porte ensuite l'expression z_2 obtenue dans la formule (3), on obtient la transformation voulue:

$$\frac{z'-1}{z'+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

Quel sens y a-t-il à remplacer une transformation de Joukovski par trois transformations (1), (2) et (3) effectuées l'une après l'autre? Le sens en est que chacune de ces transformations est plus simple et déjà connue.

Donc, appliquons à la figure représentée sur la fig. 42 la transformation (1); ensuite, à ce que nous avons obtenu, la transformation (2) et, enfin, appliquons encore à ce qu'on obtient ainsi la transformation (3).

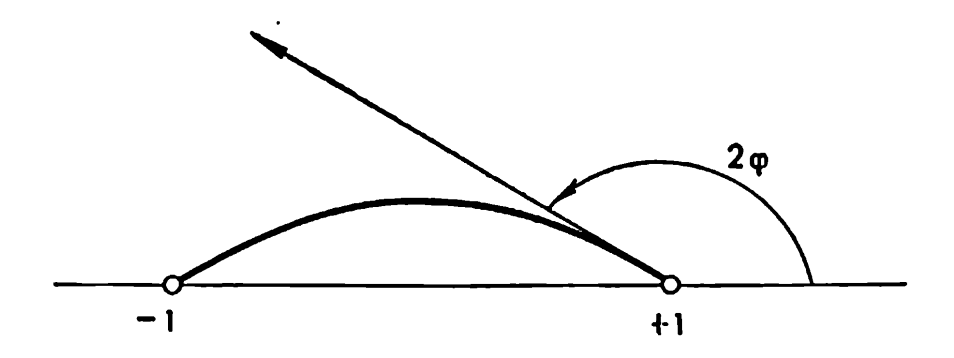


Fig. 43

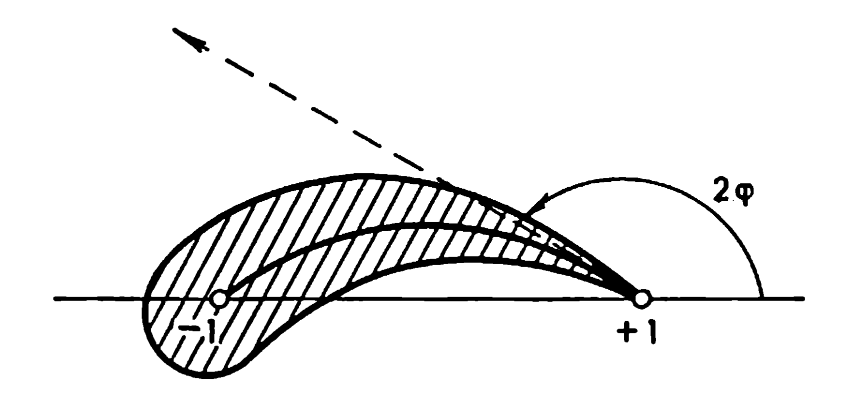
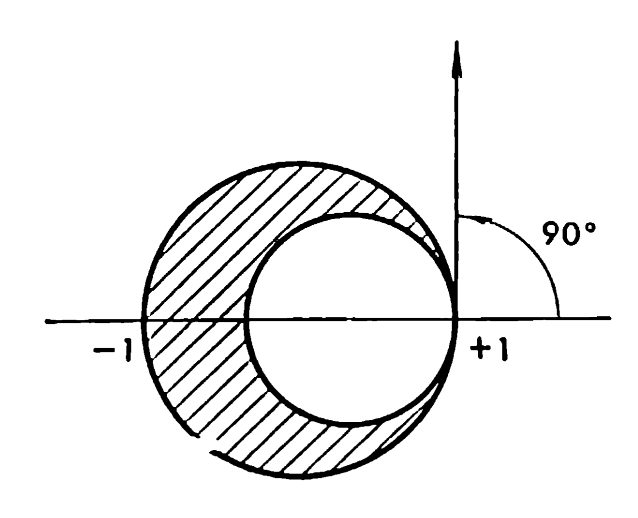


Fig. 44

Rappelons qu'au § 30 nous avons déjà trouvé que la figure représentée sur le dessin 38, à gauche (or, elle coïncide avec la figure du dessin 42) est transformée au moyen de la fonction $z_1' = \frac{z-1}{z+1}$ [c'est-à-dire de la fonction (1)] en la figure représentée sur le dessin 38, à droite. Cette dernière est limitée par la droite passant par le point 0 et formant un angle φ avec le sens positif de l'axe réel et par une circonférence tangente à cette droite au point 0. On peut caractériser cette figure comme un demi-plan dont on a retranché la circonférence. Transformons ensuite cette figure par la fonction $z_2 = z_1^2$ (2). On voit aussitôt sur la figure 41 que nous avons déjà résolu ce problème au § 33. A la fin de ce paragraphe, nous avons noté qu'on doit obtenir la figure représentée sur le dessin 41, à droite; elle est limitée par un rayon et une cardioïde. Il reste, par conséquent, à appli-



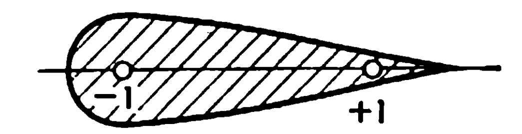


Fig. 45

quer à cette dernière figure la transformation $\frac{z'-1}{z'+1} = z_2$ (3). Ici z' peut être considéré comme une variable indépendante, et z_2 comme une fonction. Il découle de ce que nous avons dit au § 28 que lorsque z_2 décrit le rayon $A'M'$, issu de l'origine et incliné sur la partie positive de l'axe réel d'un angle 2φ, le point correspondant z' décrit un arc de circonférence réunissant les points $+1$ et -1 ; la tangente à cet arc au point $+1$ forme également avec la direction du point -1 vers le point $+1$, c'est-à-dire avec la direction positive de l'axe réel, un angle 2φ (fig. 43).

Nous avons donc trouvé l'image du rayon $A'M'$ obtenue par la transformation $\frac{z'-1}{z'+1} = z_2$. Pour trouver l'image de la cardioïde, on pourrait suivre où passent ses points, par exemple B'_1, B'_2, . . ., B'_7. Cependant, nous n'effectue-

rons pas de calculs encombrants et nous nous contenterons de représenter la courbe transformée sous son aspect définitif sur la figure 44.

La figure qu'elle délimite a l'aspect d'un profil d'aile d'avion (coupe transversale). Les savants russes S. Tchaplyguine et N. Joukovski ont été les premiers à proposer des profils de ce genre, c'est pourquoi on les appelle *profils de Joukovski-Tchaplyguine.* En faisant varier l'angle φ d'inclinaison de la tangente au cercle au point *1* (fig. 42) et le rayon de la plus petite circonférence, on obtient différents profils. En particulier, si l'angle φ est droit, c'est-à-dire si la plus grande circonférence est construite en prenant le segment de -1 à $+1$ comme diamètre, le profil correspondant est symétrique par rapport à l'axe réel (fig. 45). Un tel profil est appelé parfois *gouvernail de Joukovski.*

Les profils de Joukovski-Tchaplyguine sont les principaux profils dans toutes les recherches en théorie de l'aile d'avion.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1 Démontrer que si deux nombres complexes $c_1 = a_1 + ib_1$ et $c_2 = a_2 + ib_2$ sont égaux, leurs parties réelles et imaginaires prises séparément sont aussi égales: $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.

I n d i c a t i o n. Partir du fait que des nombres complexes égaux sont représentés par des vecteurs égaux en longueur, parallèles et dirigés dans le même sens.

2 En se servant des lois de commutativité, d'associativité et de distributivité de l'addition et de la multiplication, effectuer les opérations suivantes sur des nombres complexes:

a) $(3-7i)+(-2+i)+(-1+5i)$;

b) $(3-7i)(3+7i)$;

c) $(1+i)(1+i\sqrt{3})$;

d) $(1+i)^2:(1-i)^2$;

e) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$.

Réponses. a) $= -i$; b) 58; c) $1-\sqrt{3} + i(1+\sqrt{3})$; d) -1; e) -1.

3 Démontrer que tout nombre complexe $c = a + bi \neq 0$, dont la valeur absolue est égale à r et l'argument égal à α, peut être représenté sous la forme :

$$c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

(*forme trigonométrique d'un nombre complexe*).

● INDICATION. Exprimer a et b par r et α au moyen d'un tracé sur lequel $c = a + bi$ est représenté par un vecteur.

4 Démontrer que si
$c_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ et $c_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$, il s'ensuit que :

$$c_1c_2 = r_1r_2[\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2)].$$

● INDICATION. On se servira de la formulation géométrique de la règle de multiplication des nombres complexes ou bien on multipliera c_1 par c_2 en se servant des lois de l'addition et de la multiplication et en appliquant ensuite les formules pour le cosinus et le sinus d'une somme.

5 En s'appuyant sur le résultat du problème précédent, démontrer que si :

$$c = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

(r est la valeur absolue de c, et α argument de c), on obtient :

$$c^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$$

(n est un nombre naturel). En tirer que:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

(*formule de Moivre*).

6 En se servant de la formule de Moivre (voir exercice 5), calculer:

$$\text{a)}\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{100}; \quad \text{b)}\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{217}.$$

● INDICATION. $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\ 45° + i\ \sin\ 45°$; $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = \cos 30° + i\sin 30°$.

● RÉPONSES. a -1; b) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i}{2}$.

7 A partir de la formule de Moivre (voir exercice 5), tirer la formule pour $\cos n\alpha$ et $\sin n\alpha$, pour $n = 2, 3, 4$.

● INDICATION. Dans la formule de Moivre $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, il faut élever $\cos\alpha + i\sin\alpha$ à la puissance n par multiplication directe [par exemple, $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha$], puis écrire que les parties réelles et imaginaires à droite et à gauche du signe = dans la formule de Moivre sont égales entre elles.

● RÉPONSES. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\sin^2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$; $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$; $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$; $\sin 4\alpha = 3\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$.

8 Que devient un triangle ayant ses sommets aux points 0, $1 - i$, $1 + i$ par la transformation:

$$z' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z.$$

Quel est le sens géométrique de cette transformation?

● INDICATION. Commencer par mettre en évidence le sens géométrique. Mais on peut commencer aussi par calculer les sommets du triangle transformé.

9 Que devient un demi-plan situé au-dessus de l'axe réel et s'appuyant, comme sur un diamètre, sur un segment ayant pour extrémités -1 et $+1$, après une transformation:

$$z' = \frac{z-1}{z+1} \ ?$$

● RÉPONSE. Un angle droit limité par la partie supérieure de l'axe imaginaire et par la partie négative de l'axe réel.

10 Que devient un angle α ayant son sommet à l'origine des coordonnées par suite d'une transformation $z' = z^3$?

● RÉPONSE. Un angle d'ouverture 3α ayant son sommet à l'origine des coordonnées.

TABLE DES MATIÈRES

